

# Contrôle Géométrique Max-Plus

Formation sur les Systèmes à Événements Discrets (SED)

2<sup>e</sup> édition  
Mars 2025  
Nantes



Société d'Automatique,  
de Génie Industriel & de Productique



# Introduction

L'approche géométrique de la conception de systèmes de commande et d'estimation, déclinée pour les systèmes Max-Plus linéaires.

Cet exposé est en deux parties :

- d'abord un petit tour de la théorie,
- suivie d'une démonstration numérique.

## 1 Introduction

- Un court historique et quelques noms
- Le cas des systèmes contraints comme motivation de base

## 2 Modules, cônes et congruences

- Modules et cônes
- Noyaux et congruences
- Dualité

## 3 Invariance, commande et Observation

- Invariance contrôlée
- Commandabilité
- Rejet de perturbation
- Poursuite de modèle
- Synchronisation
- Invariance conditionnelle et Observation

## 4 Conclusion

L'approche géométrique a été introduite indépendamment à la fin des années 60, dans les références :

- G. Basile, G. Marro, *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, J. Opt. Th. & Appl., Vol. 33, pp. 306-315, 1969.
- W. M. Wonham, A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach*, SIAM J. Control , Vol. 8, pp. 1-18, 1970.

Les idées de base ont été développées dans de nombreuses directions dans deux ouvrages de référence :

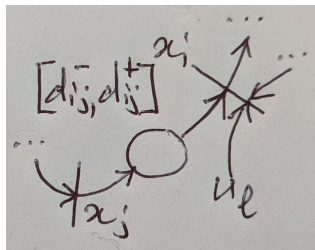
- W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 1985 (1st Ed. 1979).
- G. Basile, G. Marro, *Controlled and Conditioned Invariant in Linear System Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1992.

# Quelques noms

- On s'intéresse à la commande et l'estimation de systèmes dynamiques multivariables décrits sous forme d'état.
- **Kalman**, **Lasalle**, ont associé les notions de commandabilité, d'observabilité, de stabilité à des ensembles invariants sous l'action de la matrice du système.
- **Brunovsky**, **Luenberger** ont utilisé des transformations plus complexes pour approfondir les notions de commande et d'observation, qui ont abouties aux définitions d'invariance contrôlée et d'invariance conditionnelle par **Marro** puis **Wonham**.
- L'approche a été appliquée pour résoudre les problèmes de régulation, rejet de perturbation, découplage, poursuite de modèle, et bien d'autres. Elle a fait école dans le monde entier : **Descusse**, **Lafay** et **Malabre** à Nantes, **Dion** et **Commault** à Grenoble, a été développée par **Willems** aux Pays-Bas dans la direction de problèmes de commande robuste, a été étendue au cas des systèmes sur anneaux par **Conte** et **Perdon** en Italie, **Hautus** aux Pays-Bas, au cas de systèmes de dimension infinie par **Curtain** et **Zwart**, au cas des systèmes non-linéaires par **Isidori**, au cas des systèmes à contraintes polyédrales par **Hennet** à Toulouse.
- Dans le cas des systèmes sur demi-anneaux, notamment Max-Plus, le travail fondamental a été effectué par **Gaubert** et **Katz** au début des années 2000, après celui de **Cohen**, **Gaubert** et **Quadrat** dans les années 90. Les travaux de **Wagneur** sont à citer, ainsi que la thèse d'Inès **Klimann** sur le contrôle et les séries formelles (Paris 7, 1999), et les travaux de **Di Loreto**, **Amari** à Nantes (et ailleurs) et de l'école d'Angers : **Boimond**, **Cottenceau**, **Hardouin**, **Lahaye**, **Lhommeau**, et leurs coauteurs **Maia**, **Shang**.

# Le cas des systèmes contraints

Un problème fréquemment rencontré en pratique est de vérifier la viabilité d'un graphe d'événement temporel.



Cela se traduit par les contraintes  $x_j(k) + d_{ij}^- \leq x_i(k) \leq x_j(k) + d_{ij}^+$ .

Celle de gauche est prise en compte par l'équation du système :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k+1),$$

et celle de droite se traduit par

$$D^{-T} \otimes x(k) \leq x(k), \text{ avec } D = (d_{ij}).$$

Ainsi, le problème de vérification est ramené à un problème de commande.

Existe-t'il une commande  $u$  qui force l'état  $x(k)$  à se maintenir dans la région donnée :  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid D^{-T} \otimes x(k) \leq x(k)\}$  ?

# Le cas des systèmes contraints

On a là les principaux traits de l'approche géométrique.

- C'est ce qu'on appelle un **problème d'invariance contrôlée**.
- Dans cet exemple, **la région  $\mathcal{D}$  est un module**, c'est un cas particulier très intéressant, avec de nombreux résultats disponibles, que l'on va survoler. Les cas de contraintes polyédrales ou ellipsoïdales sont presque absents de la littérature.
- Du fait que la solution du système ne dépend que de la condition initiale  $x(0)$  et de la commande appliquée  $u(k)$ , on déduit que l'existence d'une commande respectant la contrainte ne dépend que de l'état initial.

**Le problème consiste donc à identifier les états initiaux admissibles.**

- Cette caractérisation va permettre de calculer la commande à appliquer à tout instant. **On calcule hors-ligne la loi de commande**, c'est à dire l'algorithme de calcul de la **commande en ligne, en fonction de l'état présent du système**.
- La solution ne dépend que des paramètres du système et de la contrainte, c'est à dire des matrices  $A$ ,  $B$  et  $D$ . Dans un second temps, on peut paramétrer les matrices admissibles, **ce qui va permettre la conception amont du process**, notamment son dimensionnement et l'instrumentation, pour que la phase de conception de la boucle fermée ait une solution.

## 1 Introduction

- Un court historique et quelques noms
- Le cas des systèmes contraints comme motivation de base

## 2 Modules, cônes et congruences

- Modules et cônes
- Noyaux et congruences
- Dualité

## 3 Invariance, commande et Observation

- Invariance contrôlée
- Commandabilité
- Rejet de perturbation
- Poursuite de modèle
- Synchronisation
- Invariance conditionnelle et Observation

## 4 Conclusion

# Modules, cônes et congruences

## Définition

Un sous ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  qui est stable par combinaison linéaire, au sens où :

$$\forall x, y \in \mathcal{M}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}, \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y \in \mathcal{M},$$

est appelée un sous-module, ou simplement un module de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

On s'intéresse particulièrement aux modules qui sont générés par un nombre fini de colonnes, du type :

$$\text{Im } M = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \exists v \in \mathbb{R}_{\max}^q, x = M \otimes v\},$$

où  $n$  et  $q$  sont des entiers positifs, et  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ .

# Vocabulaire et notations

Pour ce qui est du vocabulaire, on peut aussi parler de moduloïde (Wagneur, 1991), pseudomodule (Wagneur, 1994), demi-module (en français, Gaubert, 1992), semi-module (Cohen et al., 1996). C'est Ch. Reutenauer qui a fait remarquer à É. Wagneur que la définition étant celle d'un module, on peut employer ce terme.

Dans la suite, les produits sont souvent écrits sans le symbole  $\otimes$ , comme dans  $\alpha x \oplus \beta y$ . On utilise des majuscules romanes ( $A, B, \dots$ ) pour désigner les matrices, curvilignes pour les ensembles ( $\mathcal{M}, \mathcal{C}, \dots$ ), des minuscules romanes ( $x, y, \dots$ ) pour désigner des vecteurs colonnes,  $i, j, k, l$  sont plutôt utilisées pour des indices, et  $m, n, p, q$  pour la taille des vecteurs et des matrices. Le symbole  $T$  est utilisé pour la transposition ( $A^T, x^T, \dots$ ).

Comme dans l'exposé d'hier sur l'évaluation de performances, l'élément  $-\infty$  est noté  $\epsilon$ , et  $e$  désigne le nombre 0. Par contre, l'opération min est notée  $\oplus'$ , et le produit min-plus linéaire est noté  $\otimes'$ . Ainsi, la résiduation du produit s'écrit :

$$A \otimes x \leq y \iff x \leq A^{-T} \otimes' y .$$

Ainsi  $A^{-T} \otimes' y$  est la solution maximale de  $Ax \leq y$ .

De plus, il existe une solution à l'égalité  $Ax = y$  si et seulement si  $A \otimes (A^{-T} \otimes' y) = y$ .

Dans ce cas,  $x = A^{-T} \otimes' y$  est solution de  $A \otimes x = y$ .

# Modules et cônes

Un résultat essentiel de la théorie des modules sur  $\mathbb{R}_{\max}$  est la double description. On définit un cône max-plus par :

$$\text{Cone}(C, D) = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Cx = Dx\},$$

où  $C$  and  $D$  sont des matrices de  $\mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ , pour  $p, n \in \mathbb{N}$ .

## Théorème

*Un ensemble  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  étant donné, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) il existe un entier  $q$  et une matrice  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  telle que  $\mathcal{M} = \text{Im } M$ ,*
- (ii) il existe un entier  $p$  et  $C, D \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  telles que  $\mathcal{M} = \text{Cone}(C, D)$ .*

*Un sous ensemble de ce type est appelé un module de type fini.*

Le résultat est initialement dû à Butkovic et Hegedus (1984). Les algorithmes de passage d'une représentation à l'autre ont été affinés et étendus par Allamigeon, Gaubert et Goubault (2010).

Ils sont programmés dans la boîte à outils Max-Plus de Scicoslab.

Claude Martinez nous en fera la démonstration dans quelques minutes.

Les deux représentations sont chacune très utiles pour certaines opérations. Des modules  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  étant donnés, on définit :

$$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \exists x_1 \in \mathcal{M}_1, x_2 \in \mathcal{M}_2, x = x_1 \oplus x_2\},$$

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid x \in \mathcal{M}_1 \text{ et } x \in \mathcal{M}_2\}.$$

Si  $\mathcal{M}_1 = \text{Im } M_1 = \text{Cone}(C_1, D_1)$ , et  $\mathcal{M}_2 = \text{Im } M_2 = \text{Cone}(C_2, D_2)$ , alors la somme et l'intersection des deux modules s'effectue respectivement en concaténant les lignes ou les colonnes des matrices :

$$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \text{Im}(M_1 M_2),$$

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \text{Cone} \left( \left( \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \end{array} \right) \right).$$

De la même façon, une matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  et des ensembles  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_{\max}^p$  étant donnés, on définit :

$$A\mathcal{M} = \{y \in \mathbb{R}_{\max}^p \mid \exists x \in \mathcal{M}, y = A \otimes x\},$$

$$A^{-1}\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid A \otimes x \in \mathcal{P}\}.$$

Alors, si  $\mathcal{M} = \text{Im } M$ , et  $\mathcal{P} = \text{Cone}(C, D)$ , alors on :

$$A\mathcal{M} = \text{Im}(A \otimes M),$$

$$A^{-1}\mathcal{P} = \text{Cone}(C \otimes A, D \otimes A).$$

C'est pourquoi les algorithmes de passage de l'une à l'autre sont en pratique les outils de base de l'approche géométrique.

On peut aussi vérifier l'équivalence suivante :

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \iff \exists K \mid M_1 = M_2 \otimes K .$$

Mais on n'a pas de propriété similaire avec les cônes. Par exemple :

$$\text{Cone}(1, 2) = \text{Cone}(2, 1) ,$$

mais il n'existe pas de nombre  $K \in \mathbb{R}_{\max}$  tel que  $(2, 1) = K \otimes (1, 2)$ , c'est à dire  $2 = 1 \otimes K$  et  $1 = 2 \otimes K$ , car  $1 \neq -1$ .

# Modules et cônes

Les sous-modules de  $\mathbb{R}_{\max}$  ne sont pas tous de type fini. Par exemple, la famille des modules définis comme

$$\mathcal{A}_k = \text{Im} \begin{pmatrix} e & e & e & \cdots & e \\ e & 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

s'écrit aussi  $\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^2 \mid x_1 \leq x_2 \leq k + x_1\}$ . On remarque alors :

$$x_1 \leq x_2 \leq k + x_1 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ k & \epsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{A}_k = \text{Cone} \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ k & \epsilon \end{pmatrix} \right) \right).$$

On voit que lorsque  $k$  tend vers l'infini, ce module tend vers

$$\mathcal{A}_{\infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^2 \mid x_1 \leq x_2 < x_1 + \infty\}.$$

On note que cet ensemble est défini en termes d'inégalités qui peuvent être strictes. Il n'est pas fermé au sens topologique, car par exemple la suite  $(ek)^T$  ne converge pas dans l'ensemble lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . Au contraire, **un module de type fini est toujours fermé**. Nous verrons que cette propriété est très importante.

Comme le suggère l'exemple précédent, on peut noter qu'il existe un troisième type de représentation, en termes d'inégalités.

$$\text{Ineg}(C, D) = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Cx \leq Dx\},$$

Cela revient en fait à la notion de cône, du fait des égalités :

$$\text{Cone}(C, D) = \text{Ineg} \left( \left( \begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} D \\ C \end{array} \right) \right),$$

$$\text{Ineg}(C, D) = \text{Cone}(C \oplus D, D).$$

comme nous l'avons vu sur l'exemple précédent des modules  $\mathcal{A}_k$ .

Arrivé à ce moment de notre voyage en géométrie Max-Plus, on effectue quelques observations.

Dans l'algèbre Max-Plus, les cônes et les modules sont les mêmes objets. Cela vient de ce que tous les éléments de  $\mathbb{R}_{\max}$  sont supérieurs à l'élément neutre  $\epsilon$ , donc en quelque sorte "positifs". Les cônes sont, comme dans l'algèbre habituelle, des combinaisons linéaires positives de leurs générateurs, c'est à dire des modules.

Ces premières propriétés laissent penser que les cônes jouent vis-à-vis des images le rôle que jouent les noyaux avec les espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Ce n'est pas si simple.

Nous allons voir qu'on peut définir une autre notion de noyau, qui ne coïncide pas avec la notion de cône, puis une notion de dualité qui explique bien la spécificité de  $\mathbb{R}_{\max}$ .

# Noyaux et congruences

On définit le noyau d'une matrice  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  comme l'ensemble des couples de vecteurs qui partagent la même image par  $C$  :

$$\text{Ker } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n \mid Cx = Cy\} .$$

Ce concept a été introduit par Cohen et al. (1996), en vue de généraliser les concepts de projection à l'algèbre Max-Plus. Cette définition est double.

Un noyau est à la fois

- une relation d'équivalence définie sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$ ,
- et un sous-module de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$ .

On appelle congruence ce type d'objet. On identifie  $\text{Ker } C$  à un module de vecteurs  $(x^T, y^T)^T \in \mathbb{R}_{\max}^{2n}$ , pour obtenir l'égalité :

$$\text{Ker } C = \text{Cone} ((C, \epsilon), (\epsilon, C)) ,$$

qui montre que le noyau d'une matrice est toujours de type fini, en tant que module de  $\mathbb{R}_{\max}^{2n}$ .

# Noyaux et congruences

Une congruence de type fini  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  peut donc être représentée sous la forme d'une image. Il existe un entier  $q$  et des matrices  $X, Y \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  telles qu'on a :

$$\mathcal{C} = \text{Im} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Comme pour les modules, on peut donc appliquer aux congruences les opérations ensemblistes de base telles que la somme ou l'intersection :

$$\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\max}^{2n} \mid \exists (x^i, y^i) \in \mathcal{C}_i, x = x_1 \oplus x_2, y = y_1 \oplus y_2\}$$

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\max}^{2n} \mid (x, y) \in \mathcal{C}_i, i = 1, 2\}.$$

L'image par une matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^n$  d'une congruence  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  est définie par

$$A\mathcal{C} = \text{Im} \begin{pmatrix} AX \\ AY \end{pmatrix}.$$

Attention ! Le module  $AC$  n'est pas une congruence en général.

Par contre, si  $\mathcal{C} = \text{Ker } C$  comme précédemment, alors :

$$A^{-1}\mathcal{C} = \text{Ker } (C \otimes A) .$$

est bien une congruence. Enfin, si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux congruences de type fini, telles que :

$$\mathcal{C}_1 = \text{Ker } C_1 = \text{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{C}_2 = \text{Ker } C_2 = \text{Im} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} ,$$

alors on a les égalités suivantes :

$$\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 = \text{Im} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} .$$

Récapitulons les petits problèmes :

- $\text{Cone}(C_1, D_1) \subset \text{Cone}(C_2, D_2) \not\iff \exists K \mid KC_1 = C_2, KD_1 = D_2$ .
- Un noyau est un cône, mais un cône n'est pas un noyau en général.
- $AC$  n'est pas une congruence en général.
- Di Loreto et al. (2010) signalent aussi que  $AC$  n'est pas réflexive, mais rien n'est dit sur la transitivité.

Pour éclairer toutes ces questions et aller plus loin, nous avons besoin des concepts de dualité introduits par Gaubert & Katz (2009), et complétés par Di Loreto et al. (2010).

On associe à tout sous-ensemble  $\mathcal{F}$  of  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , un dual, noté  $\mathcal{F}^\perp$ , défini par :

$$\mathcal{F}^\perp = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n \mid \forall z \in \mathcal{F}, z^T x = z^T y \right\}.$$

Le dual d'un ensemble est une congruence de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$ . En effet, on vérifie facilement que  $\mathcal{F}^\perp$  est une relation d'équivalence et est fermée par combinaison linéaire.

De la même manière, on peut associer à tout sous-ensemble  $\mathcal{G}$  of  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  un dual, qui est aussi noté  $\mathcal{G}^\perp$ , défini par :

$$\mathcal{G}^\perp = \left\{ z \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \forall (x, y) \in \mathcal{G}, x^T z = y^T z \right\}.$$

Le dual de  $\mathcal{G}^\perp$  d'un ensemble  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  est un module de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ . On vérifie aussi que **le dual d'un ensemble est fermé au sens topologique**, qu'il soit ensemble de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  ou de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$ .

## Remarks

(i) Deux notations différentes sont utilisées dans les publications initiales de Gaubert & Katz (2009), Di Loreto et al. (2010), pour limiter la confusion créée par le fait qu'une congruence est un module. Dans le cadre de cette présentation, il n'y a jamais d'ambiguïté, le dual d'un module de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  est toujours une congruence de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$ , et inversement, le dual d'une congruence de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  est toujours un module de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

(ii) Deux sous-ensembles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  partagent le même dual, si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  génèrent le même module. De la même façon, deux sous-ensembles  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  ont le même module dual si  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  génèrent la même congruence.

(iii) Le dual d'un module de type fini est une congruence de type fini, et inversement, le dual d'une congruence de type fini est un module de type fini.

Le résultat suivant est démontré par Gaubert & Katz (2009).

## Théorème

Soient  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$  et  $C, D \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  des matrices. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées..

(i)  $(\text{Im } M)^\perp = \text{Ker } M^T,$

(ii)  $(\text{Ker } M^T)^\perp = \text{Im } M,$

(iii)  $\left( \text{Im} \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix} \right)^\perp = \text{Cone}(C, D),$

(iv)  $\text{Im} \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix} \subset (\text{Cone}(C, D))^\perp,$  avec égalité si  $\text{Im} \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix}$  est une congruence, ou de façon équivalente, s'il existe un entier  $k$  et une matrice

$P \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times n},$  tels que le module  $\text{Im} \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix}$  est égal à  $\text{Ker } P.$

Les démonstration des points (i) et (iii) sont immédiates à partir des définitions de dual. On raisonne par égalités successives :

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im} M)^\perp &= \left\{ (x, y) \mid \forall z \in \operatorname{Im} M, z^T x = z^T y \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid \forall v \in \mathbb{R}_{\max}^p, v^T M^T x = v^T M^T y \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid M^T x = M^T y \right\} = \operatorname{Ker} M^T .\end{aligned}$$

On applique le même principe pour (iii). L'assertion (ii) se montre à partir du Lemme suivant.

## Lemme

Deux matrices  $C_1 \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  étant données, l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\operatorname{Ker} C_1 \subset \operatorname{Ker} C_2 \iff \exists K \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times p} \mid K C_1 = C_2 .$$

Nous allons lister quelques autres résultats, qui permettent cette conclusion.

## Théorème

Des modules  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , et des congruences  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$  étant données, on a toujours les égalités suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 (i) & (\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2)^\perp = \mathcal{C}_1^\perp \cap \mathcal{C}_2^\perp \\
 (iii) & (A\mathcal{C})^\perp = (A^T)^{-1}\mathcal{C}^\perp \\
 (v) & AA^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C} \cap \text{Im}^2 A \\
 (ii) & (\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)^\perp = \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{M}_2^\perp \\
 (iv) & (A\mathcal{M})^\perp = (A^T)^{-1}\mathcal{M}^\perp \\
 (vi) & AA^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \text{Im} A
 \end{array}$$

où  $\text{Im}^2 A$  désigne l'image par  $A$  de la congruence  $\mathbb{R}_{\max}^{2n}$ . De plus, si  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  sont fermés, alors on a aussi :

$$\begin{array}{ll}
 (vii) & (\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C} \\
 (ix) & (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^\perp = \mathcal{C}_1^\perp \oplus \mathcal{C}_2^\perp \\
 (xi) & (A^{-1}\mathcal{C})^\perp = A^T \mathcal{C}^\perp \\
 (xiii) & A^{-1}A\mathcal{C} = \mathcal{C} \oplus \text{Ker} A \\
 (viii) & (\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M} \\
 (x) & (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)^\perp = \mathcal{M}_1^\perp \oplus \mathcal{M}_2^\perp \\
 (xii) & (A^{-1}\mathcal{M})^\perp = A^T \mathcal{M}^\perp \\
 (xiv) & A^{-1}A\mathcal{M} = \mathcal{M} \oplus (A^T)^{-1} \mathcal{E}
 \end{array}$$

où  $\mathcal{E}$  désigne le module nul, qui est le dual de  $\mathbb{R}_{\max}^{2n}$ . Si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  ne sont pas fermés, alors on a simplement  $\mathcal{M}_1^\perp \oplus \mathcal{M}_2^\perp \subset (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)^\perp$  en lieu et place de (x).

Ici, les résultats sont introduits dans l'ordre des démonstrations. Il a fallu environ 20 ans, depuis la thèse de Gaubert (1992), jusqu'aux articles de Gaubert & Katz, et ceux de Di Loreto et al. (2010, 2012) pour les obtenir.

# Modules et cônes

**Attention !** À propos de complétion topologique, mais aussi de double représentation, il faut souligner qu'on travaille dans  $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ , et non pas dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes)$ , qui a d'autres propriétés.

Par exemple, dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , on a  $\text{Cone}(1, 2) = \{-\infty, +\infty\} = \text{Im}(+\infty)$ , et :

$$\begin{aligned}\text{Ker}\{+\infty\} &= \{(x, y) \mid +\infty \otimes x = +\infty \otimes y\} \\ &= \{(x, y) \mid x = y = -\infty, \text{ ou } x > -\infty \text{ et } y > -\infty\} \\ &= \text{Cone}((+\infty - \infty), (-\infty, +\infty))\end{aligned}$$

Mais cette région n'est pas fermée, puisque par exemple la suite  $(x_k, y_k) = (0, -k)$  converge vers  $(0, -\infty)$ , qui n'est pas dans l'ensemble. On a donc ici un noyau d'une matrice, et un cône de type fini qui ne sont pas fermés. En tant que module, ce cône et ce noyau ne sont pas de type fini, mais sont générés par une infinité de vecteurs colonnes. On a

$$\text{Ker}\{+\infty\} = \text{Im} \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & -k & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & k & \cdots \end{pmatrix}$$

en étendant la notion d'une image aux matrices de taille infinie. Mais dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , tout redevient normal :

$$\text{Cone}(1, 2) = \{-\infty\} = \text{Im}(-\infty), \quad \text{Ker}\{-\infty\} = \mathbb{R}_{\max}^2,$$

le théorème de double description, la dualité et les propriétés de fermeture.

Nous concluons cette présentation des outils de base avec un dernier détail, qui nous servira pour parler d'observation. L'énoncé (xii) permet de réaliser que si deux matrices  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  sont données, alors :

$$A^{-1}A \text{Ker } B = \text{Ker } A \oplus \text{Ker } B .$$

Cela permet de montrer que  $A \text{Ker } B$  est toujours transitive.

$$\begin{aligned} A \text{Ker } B \text{ transitive} &\iff ((x, y), (y, z) \in A \text{Ker } B \Rightarrow (x, z) \in A \text{Ker } B) \\ &\iff ((u, v), (v', w) \in \text{Ker } B, Av = Av' \Rightarrow (Au, Aw) \in A \text{Ker } B) \\ &\iff B^{-1}B \text{Ker } A \subset A^{-1}A \text{Ker } B . \end{aligned}$$

## Corollaire

Si  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{2n}$  est une congruence, alors  $\text{Im}^2(I_p \ I_p)^T \oplus AC$  est la plus petite congruence contenant  $AC$ .

Cette plus petite congruence contenant  $AC$  est notée  $\langle AC \rangle$  dans la littérature, et  $\langle AC \rangle = ((AC)^\perp)^\perp$

De plus, si  $C' \in \mathbb{R}_{\max}^{2p}$  est aussi une congruence, alors  $C' \oplus AC$  est une congruence.

## 1 Introduction

- Un court historique et quelques noms
- Le cas des systèmes contraints comme motivation de base

## 2 Modules, cônes et congruences

- Modules et cônes
- Noyaux et congruences
- Dualité

## 3 Invariance, commande et Observation

- Invariance contrôlée
- Commandabilité
- Rejet de perturbation
- Poursuite de modèle
- Synchronisation
- Invariance conditionnelle et Observation

## 4 Conclusion

# Invariance, commande et Observation

# Invariance contrôlée

On considère un système dynamique max-plus linéaire, de la forme :

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1),$$

où  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ . Le vecteur  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est l'état instantané du système, pour  $k \geq 0$  et  $u(k)$  est sa commande, définie pour  $k \geq 1$ . Le vecteur  $x(0)$  est appelé condition initiale. On voit que la solution du système s'écrit de façon unique en fonction de  $x(0)$  et de  $u$ , sous la forme :

$$x(k) = A^k x(0) \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i).$$

## Definition

On dit qu'un module  $\mathcal{M}$  est invariant contrôlé pour la paire  $(A, B)$ , ou  $(A, B)$ -invariant, si la condition suivante est vérifiée :

Pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathcal{M}$ , il existe une commande  $u$  telle que  $x(k)$  se maintient dans  $\mathcal{M}$ , pour  $k \geq 0$ .

On introduit la notation suivante, pour tout couple de modules  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}'$  :

$$\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}' = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \exists x' \in \mathcal{M}', x \oplus x' \in \mathcal{M}\}.$$

## Proposition

$\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant si et seulement si l'inclusion suivante est vraie :

$$A\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \ominus \text{Im } B.$$

La nécessité vient en écrivant que  $x(1)$  doit appartenir à  $\mathcal{M}$ , donc il existe  $u(1)$  tel que  $Ax(0) \oplus Bu(1) \in \mathcal{M}$ , pour tout  $x(0)$  dans  $\mathcal{M}$ . La suffisance s'obtient par récurrence. La condition montre que  $x(1)$  peut être maintenue dans  $\mathcal{M}$  par un choix approprié de la commande  $u(1)$ , si  $x(0)$  est initialement dans  $\mathcal{M}$ , et généralement,  $x(k+1)$  est maintenue dans  $\mathcal{M}$  par  $u(k+1)$  si  $x(k)$  est dans  $\mathcal{M}$ .

# Invariance contrôlée

En pratique, la propriété d' $(A, B)$ -invariance peut se ramener à une équation matricielle. On suppose que  $\mathcal{M} = \text{Im } M = \text{Cone}(E, F)$ , où  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ , et  $E, F \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ .

## Proposition

$\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant si et seulement si et seulement si l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée

- (i)  $\exists U \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times q}, V \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times q} \mid A \otimes M \oplus B \otimes U = M \otimes V,$
- (ii)  $\exists U \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times q} \mid E \otimes (A \otimes M \oplus B \otimes U) = F \otimes (A \otimes M \oplus B \otimes U).$

Le nombre de générateurs du module de  $\mathcal{M}$ , qui est ici le nombre  $q$ , est susceptible d'être bien plus grand que la dimension  $n$  du système. C'est pourquoi l'énoncé (ii) est souvent préférable en pratique, même s'il n'est pas trouvé dans la littérature. En tout cas, la matrice  $U$  sert à déterminer la loi de commande à appliquer.

## Corollaire

$U$  étant une solution des équations (i) ou (ii) de la Proposition, une commande qui permet de maintenir l'état dans le module  $\mathcal{M}$  est donnée pour  $k \geq 0$  sous la forme :

$$u(k+1) = U \otimes (M^{-T} \otimes' x(k)) .$$

# Invariance contrôlée

La preuve est simple.

Si  $x(k) \in \text{Im } M$ , alors l'identité  $x(k) = Mv(k)$  a une solution  $v(k)$ . Cette solution n'est pas unique, mais il existe une solution maximale qui s'écrit :

$$v(k) = M^{-T} \otimes' x(k).$$

Si de plus  $\text{Im } M$  est invariant contrôlé, alors des matrices  $U$  et  $X$  vérifient  $AM \oplus BU = MV$ , donc  $AMv(k) \oplus BUv(k) = MVv(k)$ .

La commande par retour d'état statique définie par :

$$u(k+1) = U \otimes v(k) = U \otimes (M^{-T} \otimes' x(k)),$$

permet donc d'obtenir l'invariance de  $\text{Im } M$  en boucle fermée. On obtient

$$x(k+1) = MV \otimes (M^{-T} \otimes' x(k)).$$

Cette loi de commande n'est pas unique, mais a priori, contrairement au cas des systèmes linéaires sur  $\mathbb{R}$ , il n'existe pas toujours un retour d'état linéaire statique de la forme  $uk+1 = Fx(k)$ , où  $F \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ . Cardenas et al. (2015) montrent qu'un retour d'état linéaire peut être utilisé, au prix d'une extension dynamique.

## Proposition

- L'union ou la somme de deux modules  $(A, B)$ -invariants est elle-même  $(A, B)$ -invariante. En conséquence, il existe dans tout ensemble  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  un  $(A, B)$ -invariant maximal, noté  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B)$ , qui est égal à l'union des ensembles  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $\mathcal{K}$ .
- Si  $\mathcal{K}$  est un module, alors l' $(A, B)$ -invariant maximal est lui-même un module, qui coïncide avec l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{K}$  qui sont des conditions initiales de trajectoires du système qui se maintiennent dans  $\mathcal{K}$ .
- L'algorithme (IMA) du module invariant maximal est défini par :

$$\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1} (\mathcal{V}^k \ominus \text{Im } B) , \mathcal{V}^0 = \mathcal{K} .$$

Il converge vers  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B)$ , au sens où  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}^k$ , s'il devient stationnaire après un nombre fini d'étapes :  $\exists k_0 \mid \mathcal{V}^k = \mathcal{V}^{k_0}, \forall k \geq k_0$ .

Un problème ouvert est de trouver des conditions moins restrictives de convergence. Katz (2007) propose des conditions de volume sur le module  $\mathcal{K}$ , dans le cas de systèmes définis sur  $\mathbb{Z}_{\max}$ .

Une conjecture est que la convergence est assurée lorsque la matrice  $A$  est irréductible.

## Invariance contrôlée

Pour calculer  $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^k \ominus \text{Im } B)$ , on part d'une matrice  $V$  telle que  $\text{Im } V = \mathcal{V}^k$ , puis on calcule les matrices  $D$ ,  $U$ , et  $X$  telles que

$$\text{Im} \begin{pmatrix} D \\ U \\ X \end{pmatrix} = \text{Cone}((I_n \ B \ \epsilon), (\epsilon \in V)) ,$$

autrement dit une solution maximale à  $D \oplus BU = VX$ . Alors on a :

$$\text{Im } D = \mathcal{V}^k \ominus \text{Im } B .$$

On calcule ensuite les matrices  $E$  et  $F$  telles que  $\text{Im } D = \text{Cone}(E, F)$ , et on connaît  $G$  et  $H$  telles que  $\text{Cone}(G, H) = \mathcal{K}$ . Alors on a finalement

$$\mathcal{V}^{k+1} = \text{Cone} \left( \left( \begin{pmatrix} EA \\ G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} FA \\ H \end{pmatrix} \right) \right) .$$

# Invariance contrôlée

Tous les modules ne sont pas invariants contrôlés. Par exemple, dans le problème de contrainte temporelle qui nous avons mentionné comme motivation fondamentale, la matrice  $D$  ne conduit pas en général à la définition d'un module  $(A, B)$ -invariant.

Notons que dans ce cas, le module est finiment généré. Il s'écrit

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid D^{-T} \otimes x \leq x\}, \text{ soit } \mathcal{K} = \text{Im}(D^{-T})^*.$$

Comme nous le signalions avec cet exemple, la solution consiste à identifier le lieu des conditions initiales admissibles, qui n'est autre que le module  $(A, B)$ -invariant maximal. La condition nécessaire et suffisante de viabilité de la trajectoire est donc que la condition initiale soit dans ce module maximal :

$$x(0) \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B).$$

Dans ce contexte des systèmes définis dans l'algèbre max-plus, la condition initiale est souvent prise sous forme canonique, égale à  $\epsilon$ , ce qui revient à dire qu'on commence le décompte des événements à partir de l'instant initial. La solution triviale  $x(k) \equiv \epsilon$  est donc toujours admissible. Un graphe d'événement temporel est donc toujours viable, au sens où  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B)$  est toujours défini. La solution triviale  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B) = \{\epsilon\}$  correspond à un blocage complet, où aucune contrainte n'est enfreinte, du fait de l'absence de franchissement de transition.

# Invariance contrôlée

Voilà un exemple tiré de Cardenas et al. (2015), d'après Maia et al. (2011). Il s'agit d'un système de feux de signalisation pour la gestion d'un réseau de transport. On a un système décrit par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 5 & -\infty \\ 10 & 0 & 15 & 7 \\ 4 & -\infty & 9 & -\infty \\ 15 & 5 & 20 & 12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 10 & 0 & -\infty & -\infty \\ 4 & -\infty & 0 & -\infty \\ 15 & 5 & -\infty & 0 \end{pmatrix},$$

avec des contraintes de synchronisation pour assurer les correspondances :

$$M = D^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -15 & -30 \\ 10 & 0 & -5 & -15 \\ 6 & -11 & 0 & -26 \\ 15 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'il existe une solution à l'équation  $AM \oplus BU = MV$  :

$$U = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 17 & 6 & 11 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 5 & 0 \\ 22 & 12 & -\infty & -\infty \\ 15 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 19 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix},$$

de plus on a ici un retour d'état statique linéaire, car  $U = FM$ , avec

$$F = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 5 & 5 \\ 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, en utilisant ces formules, on peut calculer itérativement l'espace commandable associé à un système dynamique max-plus linéaire, de la forme

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) ,$$

On voit que la solution de ce système s'écrit de façon unique en fonction de la condition initiale  $x(0)$  et de la commande  $u$ , sous la forme :

$$x(k) = A^k x(0) \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) .$$

À partir de là, on voit que l'espace atteignable en  $k$  étapes à partir de  $e$  s'écrit :

$$\mathcal{A}^k(A, B) = \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i \text{Im} B ,$$

que l'on évalue comme :

$$\mathcal{A}^{k+1}(A, B) = \text{Im}(B A B \cdots A^k B) .$$

# Atteignabilié

Si par exemple on a (d'après Wagner (1991)) :

$$A = \begin{pmatrix} e & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix},$$

On obtient

$$\mathcal{A}^{k+1}(A, B) = \text{Im} \begin{pmatrix} e & e & e & \cdots & e \\ e & 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà remarqué tout à l'heure que ce module s'écrit en termes d'inégalités, sous la forme :  $\mathcal{A}_k = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^2 \mid x_1 \leq x_2 \leq k + x_1\}$ .

Lorsque  $k$  tends vers l'infini, ce module tend vers

$$\mathcal{A}(A, B) = \left\{x \in \mathbb{R}_{\max}^2 \mid x_1 \leq x_2 < x_1 + \infty\right\},$$

et cette limite n'est pas fermée car la suite  $\begin{pmatrix} e \\ k \end{pmatrix}$  ne converge pas lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

Katz (2007) a montré que si la matrice  $A$  est irréductible, alors le module d'atteignabilité est finiment généré. Cela vient de ce que dans ce cas, il existe des nombres entiers  $k_0$  et  $c$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\max}^n, \forall k \geq k_0, A^{k+c}x = \lambda^c A^k x .$$

Alors, l'espace atteignable est égal à  $\mathcal{A}^{k_0+c-1}(A, B)$ .

Malheureusement, on n'a pas de résultat similaire pour l'invariance contrôlée. Il n'y a pas non plus de contre-exemple dans la littérature. Ainsi, une conjecture est que l'algorithme du module  $(A, B)$ -invariant maximal est stationnaire en temps fini lorsque la matrice  $A$  est irréductible.

# Rejet de perturbation

On considère maintenant un système dynamique max-plus linéaire perturbé :

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1) \oplus Ew(k+1),$$

dont l'évolution dépend d'une entrée de commande  $u$  dans  $\mathbb{R}_{\max}^m$ , mais aussi d'une entrée de perturbation  $w$  dans  $\mathbb{R}_{\max}^q$  qui évolue de façon imprévisible. On souhaite calculer une commande de façon à maintenir l'état dans un module  $\mathcal{K}$  qu'on suppose donné.

Cela revient à maintenir l'état dans un sous module  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{K}$ , pour que :

$$\forall x(k) \in \mathcal{M}, \exists u(k+1) \in \mathbb{R}_{\max}^m, \forall w(k+1) \in \mathbb{R}_{\max}^q, Ax(k) \oplus Bu(k+1) \oplus Ew(k+1) \in \mathcal{M}.$$

Cette condition se ramène aux trois conditions suivantes :

$$1/ \mathcal{M} \subset \mathcal{K}, \quad 2/ A\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \ominus \text{Im } B, \quad 3/ \text{Im } E \subset \mathcal{M}.$$

Il doit donc exister un  $(A, B)$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$  et contenant  $\text{Im } E$ . La condition nécessaire et suffisante pour cela est la suivante :

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B).$$

La commande permettant de maintenir la trajectoire dans la spécification donnée  $\mathcal{K}$  s'exprime comme nous l'avons vu sous forme d'un feedback de la forme  $u(k+1) = U \otimes (M^{-T} \otimes' x(k))$ , à partir des matrices  $M$  et  $U$  associées à  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B)$ .

# Rejet de perturbation avec mesure de la perturbation

On peut reprendre le problème précédent sous l'hypothèse que la perturbation  $w(k+1)$  est mesurée à chaque instant, et peut être prise en compte pour le calcul de la commande  $u(k+1)$ . Dans ce cas, la condition à satisfaire s'écrit :

$$\forall x(k) \in \mathcal{M}, \forall w(k+1) \in \mathbb{R}_{\max}^q, \exists u(k+1) \in \mathbb{R}_{\max}^m, Ax(k) \oplus Bu(k+1) \oplus Ew(k+1) \in \mathcal{M}.$$

Cette condition se ramène aux trois conditions suivantes :

$$1/ \mathcal{M} \subset \mathcal{K}, \quad 2/ A\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \ominus \text{Im } B, \quad 3/ \text{Im } E \subset \mathcal{M} \ominus \text{Im } B.$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution à ce problème s'écrit

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B) \ominus \text{Im } B.$$

Sous cette condition, si  $M$  est une matrice génératrice de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*(A, B)$ , alors il existe des matrices  $U_1, U_2, V_1$  et  $V_2$  telles que  $AM \oplus BU_1 = MV_1$  et  $E \oplus BU_2 = MV_2$ . En conséquence, une loi de commande qui permet de maintenir l'état dans la spécification  $\mathcal{K}$  s'écrit sous la forme d'un retour d'état avec mesure de la perturbation :

$$u(k+1) = U_1 \otimes (M^{-T} \otimes x(k)) \oplus U_2 \otimes w(k+1).$$

(See also Basile & Marro (1992), Wonham (1979), Willems (1981) dans le cas classique, Lhommeau et al. (2002), Hardouin et al. (2011), Shang et al. (2011), dans Max-Plus).

## 1 Introduction

- Un court historique et quelques noms
- Le cas des systèmes contraints comme motivation de base

## 2 Modules, cônes et congruences

- Modules et cônes
- Noyaux et congruences
- Dualité

## 3 Invariance, commande et Observation

- Invariance contrôlée
- Commandabilité
- Rejet de perturbation
- Poursuite de modèle
- Synchronisation
- Invariance conditionnelle et Observation

## 4 Conclusion

# Poursuite de modèle

On considère comme précédemment le système dynamique max-plus linéaire :

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1), \quad y(k) = Cx(k),$$

complété par un modèle :

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) \oplus B_m u_m(k+1), \quad y_m(k) = C_m x_m(k).$$

(Notons que  $x_m$  n'est pas ici la  $m$ -ième composante du vecteur  $x$ , mais bon ces notations sont utilisées dans la littérature depuis 50 ans). Le modèle global s'obtient par concaténation des deux sous-modèles :

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ x_m(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \epsilon \\ \epsilon & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x_m(k) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B \\ \epsilon \end{pmatrix} u(k+1) \oplus \begin{pmatrix} \epsilon \\ B_m \end{pmatrix} u_m(k+1).$$

L'objectif est de calculer la commande  $u(k+1)$  à chaque instant pour que le système se comporte exactement comme le modèle, c'est à dire que  $y(k) = y_m(k)$  à tout instant  $k \geq 0$ . Cela revient à résoudre un problème de rejet de perturbation pour le système global, vis-à-vis de la "perturbation"  $w(k) = u_m(k)$ .

Du fait que l'entrée de consigne  $u_m(k+1) = w(k+1)$  est connue, c'est la variante avec mesure de la perturbation que nous pouvons appliquer ici.

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution au problème de poursuite de modèle s'écrit donc

$$\text{Im } E_e \subset \mathcal{V}_{\mathcal{K}_e}^*(A_e, B_e) \ominus \text{Im } B_e ,$$

avec :

$$E_e = \begin{pmatrix} \epsilon \\ B_m \end{pmatrix} , \mathcal{K}_e = \text{Cone}((C \epsilon), (\epsilon C_m)) , A_e = \begin{pmatrix} A & \epsilon \\ \epsilon & A_m \end{pmatrix} , B_e = \begin{pmatrix} B \\ \epsilon \end{pmatrix} .$$

Une loi de commande qui réalise la poursuite parfaite de modèle pour le système en boucle fermée est définie sous la forme :

$$u(k+1) = U_1 \otimes (M^{-T} \otimes x_e(k)) \oplus U_2 \otimes u_m(k+1) .$$

où les matrices  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$  sont telles que  $A_e M_e \oplus B_e U_1 = M_e V_1$  et  $E_e \oplus B_e U_2 = M_e V_2$ , et  $M_e$  est une matrice de base de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_e}^*(A_e, B_e)$ , s'il en existe, c'est à dire si ce module est de type fini.

(Voir aussi Libeaut (1996), Animobono et al. (2023), Bartolucci et al. (2024)).

# Synchronisation de systèmes

Une variante du problème de poursuite de modèle a été introduite par Martinez et al. (2022). On considère comme précédemment le système dynamique max-plus linéaire complété par un modèle

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k+1), \quad y(k) = Cx(k),$$

complété par un modèle :

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k), \quad y_m(k) = C_m x_m(k).$$

Le modèle est ici autonome, ce qui correspond par exemple à un fonctionnement périodique (mais ce n'est pas limitatif. La méthode peut être adaptée au cas où le fonctionnement périodique de base peut être retardé par une commande  $u_m(k)$ ). En revanche, on ne recherche pas la poursuite exacte depuis l'instant initial, mais seulement qu'il existe un entier  $k_0$  tel que  $\forall k \geq k_0$ , l'égalité  $y(k) = y_m(k)$  est satisfaite. Il s'agit d'un objectif de synchronisation en temps fini.

La solution s'exprime de nouveau en termes d'(A, B)-invariant, et ici en termes des condition initiales, et d'un entier  $k_0$  :

$$\exists k_0 \mid \begin{pmatrix} x(k_0) \\ x_m(k_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}_e}^*(A_e, B_e),$$

où les matrices  $A_e$ ,  $B_e$  et le module  $\mathcal{K}_e$  sont définis comme précédemment dans le problème de poursuite de modèle.

La deuxième partie de ce problème de synchronisation en temps fini consiste un problème de coatteignabilité. Il s'agit de vérifier s'il existe une commande qui permet de mener l'état depuis sa valeur initiale jusqu'à un point du module  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_e}^*(A_e, B_e)$ , en temps fini  $k_0$ .

## Définition

Un système max-plus linéaire et un module  $\mathcal{M}$  étant donnés sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , on définit  $\text{Cor}_k \mathcal{M}$  comme l'ensemble des valeurs initiales  $x_0$  pour lesquelles il existe une commande permettant d'atteindre un point de  $\mathcal{M}$  en temps  $k$  :

$$\text{Cor}_k \mathcal{M} = \{x(o) \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \exists u, x(k) \in \mathcal{M}\} ,$$

puis  $\text{Cor} \mathcal{M}$  comme l'ensemble coatteignable de  $\mathcal{M}$  en temps fini :

$$\text{Cor} \mathcal{M} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Cor}_k \mathcal{M} .$$

# Synchronisation de systèmes

On introduit la séquence suivante en vue de calculer l'espace coatteignable d'un module  $\mathcal{M}$  donné :

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{M}, \mathcal{C}_{i+1} = A^{-1}(\mathcal{C}_i \ominus \text{Im } B).$$

Cet algorithme est particulièrement intéressant lorsque le module  $\mathcal{M}$  est  $(A, B)$ -invariant.

## Théorème

*Si  $\mathcal{M}$  est un module invariant contrôlé du système considéré, alors la suite  $\mathcal{C}_k$  est non-décroissante. Sa limite, définie par  $\mathcal{C}_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$ , est alors égale à  $\text{Cor}(\mathcal{M})$ , elle satisfait  $\mathcal{C}_\infty = A^{-1}(\mathcal{C}_\infty \ominus \text{Im } B)$ , et l'on a :*

$$\mathcal{C}_\infty = \inf \{ \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_{\max}^n) \mid A^{-1}(\mathcal{X} \ominus \text{Im } B) \subset \mathcal{X} \}.$$

En pratique, il n'est pas certain que la suite devienne stationnaire en temps fini, donc il n'est pas certain que  $\text{Cor}(\mathcal{M})$  soit un module de type fini.

En revanche, les espaces  $\text{Cor}_k \mathcal{M}$  sont tous de type fini. On peut donc toujours calculer le module coatteignable de  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_e}^*(A_e, B_e)$  sur un horizon fini  $k$ .

# Invariance conditionnelle

L'invariance conditionnelle est la notion duale de l'invariance contrôlée. Elle aussi a été introduite par Basile et Marro en 1969. Cette notion intervient dans des problèmes d'observation. On considère donc un système dynamique max-plus linéaire de la forme

$$x(k+1) = Ax(k), \quad y(k) = Cx(k), \quad z(k) = Dx(k),$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est l'état du système,  $y(k) \in \mathbb{R}_{\max}^p$  est une sortie mesurée, et  $z(k) \in \mathbb{R}_{\max}^q$  est une sortie à reconstruire. Comme dans le cas des systèmes définis sur  $\mathbb{R}$ , l'idée est d'utiliser les mesures  $y(k)$  pour estimer les valeurs de  $z(k)$ .

## Définition

*On dit d'une congruence  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_{\max}^{2n}$  qu'elle est conditionnellement invariante, ou  $(C, A)$ -invariante, si la condition suivante est vérifiée :*

$$A(\mathcal{S} \cap \text{Ker } C) \subset \mathcal{S}.$$

# Invariance conditionnelle

On obtient facilement une caractérisation algébrique de l'invariance conditionnelle d'une congruence  $\mathcal{S}$  de type fini. Si  $\mathcal{S} = \text{Ker } S$ , on a

$$A(\mathcal{S} \cap \text{Ker } C) \subset \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists Y, W \mid Y C \oplus W S = S A.$$

La preuve utilise des propriétés des congruences :

$$\begin{aligned} A(\text{Ker } S \cap \text{Ker } C) \subset \text{Ker } S &\Leftrightarrow A \text{Ker} \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} \subset \text{Ker } S \\ &\Leftrightarrow \text{Ker} \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} \subset \text{Ker } S A \\ &\Leftrightarrow \exists X \mid X \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} = S A \end{aligned}$$

et finalement, on définit  $Y$  et  $W$  par  $(Y \ W) = X$ .

On obtient ainsi facilement le pendant exact dans l'algèbre Max-Plus de la théorie de Luenberger (1967, 1971) sur les observateurs.

## Théorème

*Un système dynamique linéaire défini par les matrices  $(C, A, D)$  étant donné, la congruence  $\text{Ker } D$  est conditionnellement invariante si et seulement si il existe des matrices  $W$  et  $Y$  telle que le système dynamique défini par :*

$$w(k+1) = W w(k) \oplus Y y(k),$$

*vérifie la condition suivante, pour  $k \geq 0$  :*

$$w(k) = z(k) \Rightarrow w(k+1) = z(k+1).$$

*Le cas échéant, ce système dynamique est appelé un observateur de la sortie à estimer  $z(k) = D x(k)$ .*

Ce résultat est obtenu par Di Loreto et al. (2010, 2012)

La preuve est simple. On a vu que si  $\mathcal{D} = \text{Ker } D$ , alors il existe des matrices  $W$  et  $Y$  telles que  $WD \oplus YC = DA$ . Alors, si  $w(k) = Dx(k)$ , on obtient  $w(k+1) = Ww(k) \oplus Yy(k)$ , par définition de l'observateur, soit  $w(k+1) = WDx(k) \oplus YCx(k) = (WD \oplus DC)x(k) = DAx(k) = x(k+1)$ .

Inversement, si pour tout couple  $(w(k), x(k))$ , l'égalité  $w(k) = Dx(k)$  implique  $w(k+1) = z(k+1)$ , soit  $Dx(k+1)DAx(k) = WDx(k) \oplus YCx(k) = (WD \oplus YC)x(k)$ , alors l'égalité  $WD \oplus YC = DA$  est nécessairement satisfaite, et donc  $\text{Ker } D$  est conditionnellement invariant.

# Invariance conditionnelle

Il n'est pourtant pas indispensable que  $\text{Ker } D$  soit conditionnellement invariant pour qu'on soit capable de reconstruire la sortie  $z(k) = Dx(k)$ .

Pour qu'il existe une matrice  $K$  telle que  $D = KS$ , il faut et il suffit qu'une congruence  $\mathcal{S} = \text{Ker } S$  soit contenue dans  $\text{Ker } D$ . Si  $\mathcal{S}$  est  $(C, A)$ -invariante, alors il existe des matrices  $W$  et  $Y$  telles que  $WS \oplus YC = SA$ . L'observateur  $w(k+1) = Ww(k) \oplus Yy(k)$  permet alors de suivre la sortie  $Sx(k)$ , donc aussi  $z(k) = Dx(k) = KSx(k)$ .

Il suffit donc de construire une congruence  $(C, A)$ -invariante incluse dans  $\text{Ker } D$ . Malheureusement, cela n'est pas immédiat. L'invariance conditionnelle n'est pas stable pour l'union ou la somme des congruences, de sorte qu'il n'existe pas de congruence maximale conditionnellement invariante incluse dans  $\text{Ker } D$ . Mais on a :

## Théorème

*L'intersection de deux congruences  $(C, A)$ -invariantes est elle-même  $(C, A)$ -invariante. On en déduit qu'il existe une plus petite congruence  $(C, A)$ -invariante contenant une congruence  $\text{Ker } E$  donnée.*

$$\mathcal{S}_{\text{Ker } E}^*(C, A) = \inf \left\{ \mathcal{S} \subset \mathbb{R}_{\max}^{2n} \mid \text{Ker } E \subset \mathcal{S}, A(\mathcal{S} \cap \text{Ker } C) \subset \mathcal{S} \right\} .$$

# Invariance conditionnelle

La condition  $A(\mathcal{S} \cap \text{Ker } C) \subset \mathcal{S}$  équivaut à  $\mathcal{S} \cap \text{Ker } C \subset A^{-1}\mathcal{S}$ . à partir de là, si  $\mathcal{S}_i \cap \text{Ker } C \subset A^{-1}\mathcal{S}_i$ , pour  $i = 1, 2$ , on obtient  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \text{Ker } C = (\mathcal{S}_1 \cap \text{Ker } C) \cap (\mathcal{S}_2 \cap \text{Ker } C) \subset A^{-1}\mathcal{S}_1 \cap A^{-1}\mathcal{S}_2 = A^{-1}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$ , ce qui établit le résultat.

## Théorème

*Cette congruence minimale est la limite de l'itération définie par :*

$$\mathcal{S}^{k+1} = \text{Ker } E \oplus A(\mathcal{S}^k \cap \text{Ker } C), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{S}^0 = \text{Ker } E,$$

*au sens où*

$$\mathcal{S}_{\text{Ker } E}^*(C, A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k.$$

*Elle est finiment générée si cet algorithme devient stationnaire en un nombre fini d'étapes.*

*De plus, toutes les étapes  $\mathcal{S}^k$  sont des congruences.*

# Invariance conditionnelle

La première affirmation se montre en établissant que  $\mathcal{S}_{\text{Ker}D}^*(C, A)$  est une congruence conditionnellement invariante (Di Loreto et al. (2010)). On a :

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}_{\text{Ker}E}^*(C, A) \cap \text{Ker}C) &= A\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k\right) \cap \text{Ker}C\right) \\ &= A\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}^k \cap \text{Ker}C)\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A(\mathcal{S}^k \cap \text{Ker}C)) \\ &\subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}_{\text{Ker}E}^*(C, A). \end{aligned}$$

La dernière affirmation est une conséquence du Lemme énoncé tout à l'heure, qui se montre par récurrence. Elle est vraie à l'étape initiale, et si elle est vraie à l'étape  $k$ , alors  $\mathcal{S}^k \cap \text{Ker}C$  est une congruence, donc  $A(\mathcal{S}^k \cap \text{Ker}C)$  est transitive, donc  $\text{Ker}E \oplus A(\mathcal{S}^k \cap \text{Ker}C)$  est une congruence.

# Invariance conditionnelle

Au bout du compte,  $\text{Ker } E$  est une congruence, elle est réflexive, et cette réflexivité équivaut à l'inclusion

$$\{(x, y) \mid x = y\} = \text{Ker } I_n = \text{Im} \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} \subset \text{Ker } E ,$$

ce qui implique a fortiori que  $\text{Ker } E \oplus A \left( \mathcal{S}^k \cap \text{Ker } C \right)$  est réflexive. En particulier, on voit que  $\text{Ker } I_n$  est la plus petite des congruences.

Cela nous donne directement la solution au problème d'observation de la sortie non mesurée  $z(k) = D x(k)$ .

## Théorème

*Il existe un observateur de la forme  $w(k+1) = Ww(k) \oplus Yy(k)$ , et une matrice  $K$  tels que la sortie  $z(k) = D x(k)$  vérifie  $z(k) = Kw(k)$ , pour  $k \geq 0$ , si  $z(0) = Kw(0)$ , si et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{S}_{\text{Ker } I_n}^*(C, A) \subset \text{Ker } D .$$

## 1 Introduction

- Un court historique et quelques noms
- Le cas des systèmes contraints comme motivation de base

## 2 Modules, cônes et congruences

- Modules et cônes
- Noyaux et congruences
- Dualité

## 3 Invariance, commande et Observation

- Invariance contrôlée
- Commandabilité
- Rejet de perturbation
- Poursuite de modèle
- Synchronisation
- Invariance conditionnelle et Observation

## 4 Conclusion

# Conclusion

# Conclusion

L'approche géométrique est un outil très puissant. On obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solution aux problèmes de commande, qui expriment une compréhension profonde des phénomènes, permettent la vérification numérique puis la mise en oeuvre en ligne, voire la conception amont du processus, au delà de la simple conception du système de contrôle.

Dans la théorie classique, il y a un ingrédient important qui est la prise en compte de la stabilité, ce qui permet de traiter les problèmes "avec stabilité" ce qui est important en pratique. Typiquement, il faut que les dynamiques orthogonales à l'espace invariant soit stable. Nous n'avons rien vu de tel. La co-atteignabilité dans le problème de synchronisation va dans ce sens, mais il est sans doute possible d'aller plus loin dans la prise en compte de propriétés spectrales, pour garantir que si la condition initiale n'est pas dans la région invariante, la distance entre l'état et cette région est décroissante.

# Conclusion

Il reste de nombreux problèmes ouverts. Un premier est la convergence de l'algorithme (IMA) du module invariant maximal. Une conjecture est que cette convergence est assurée si la matrice du système est irréductible. Mais cette condition n'est pas toujours présente en pratique, du fait qu'on construit souvent des systèmes étendus pour formuler les problèmes de commande. Le problème plus général est trouver des conditions pour cette convergence.

D'autres problèmes concernent la loi de commande. Un problème classique est l'existence d'un retour d'état statique pour réaliser l'invariance. Il n'existe pas d'exemple de système linéaire sur  $R_{\max}$  pour lequel un module invariant contrôlé ne peut pas être rendu invariant par retour d'état statique. Il en existe sur  $\mathbb{N}_{\min}$ , mais qui ne peuvent pas être transposés sur  $R_{\max}$ .

Les outils tels que la notion de congruence sont prêts, mais il y a très peu de résultats disponibles concernant la commande par retour de sortie dynamique, avec un observateur dans la boucle. Étendre dans cette direction les résultats acquis sur le rejet de perturbation, la poursuite de modèle, et d'autres problèmes, est une direction prometteuse.

Nous n'avons pas évoqué la causalité. Dans l'algèbre Max-Plus, un retour d'état statique est causal si ses coefficients sont dans  $R_{\max}^+$ . Cette condition est facile à tester, et la construction de solution d'équations dans cet ensemble est également aisée. La question qui est ouverte est de tester la causalité d'un retour d'état non-linéaire, donné sous la forme d'une expression max-min-plus comme nous en avons rencontrée. Il n'existe que des conditions suffisantes pour la causalité de ce type de loi de commande.

## Références bibliographiques

# Références bibliographiques

- G. Basile, G. Marro, *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, J. Opt. Th. & Appl., Vol. 33, pp. 306-315, 1969.
- W. M. Wonham, A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach*, SIAM J. Control , Vol. 8, pp. 1-18, 1970.
- W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 1985.
- G. Basile, G. Marro, *Controlled and Conditioned Invariant in Linear System Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1992.
- J.C. Willems, *Almost Invariant Subspaces : An Approach to High Gain Feedback Design-Part I : Almost Controlled Invariant Subspaces*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-26, No. 1, pp. 235-252,1981.
- J.C. Willems, *Almost Invariant Subspaces : An Approach to High Gain Feedback Design-Part II : Almost Conditionally Invariant Subspaces*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-27, No. 5, pp. 1071-1085, 1982.
- M. L. J. Hautus, *Controlled invariance in systems over ring*, In : D. Hinrichsen, and A. Isidori (Eds.), *Proceeding of the Joint Workshop on Feedback and Synthesis of Linear and Nonlinear Systems*, Lecture Notes in Control and information Sci., vol 39, Springer, New York, pp. 107-122,1982.
- G. Conte, A. M. Perdon, *The disturbance decoupling problem for systems over ring*, SIAM J. Control Optim., Vol. 33, pp. 750-764, 1995.

# Références bibliographiques

- E.W. Kamen, Linear Systems Over Rings : From R. E. Kalman to the Present, In : Linear Systems Over Rings : From R. E. Kalman to the Present, pp. 311-324, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.
- S. Gaubert, Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, Thèse de Doctorat, École des Mines de Paris, 1992.
- J.-Y. Le Boudec, P. Thiran, Network Calculus : A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet, Springer, Berlin, 2001
- R.A. Cuninghame-Green, Minimax algebra and applications, In Advances in imaging and electron physics, Vol. 90, New York : Academic Press, 1995.
- F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, J. Quadrat, Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems Wiley and Sons, 1992.
- B. Heidergott, G.J. Olsder, J. van der Woude, Max Plus at Work : Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications, Series : Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 2006.
- L. Hardouin, B. Cottenceau, Y. Shang, J. Raisch, Control and State Estimation for Max-Plus Linear Systems, Now Publishers, Boston-Delft, 2018.
- S. Gaubert, R. D. Katz, Reachability and invariance problems in max-plus algebra, In Proc. POSTA3, L. Benvenuti, A. De Santis, and L. Farina, Eds., pp. 15-22, Berlin, Germany : Springer-Verlag, 2003.

# Références bibliographiques

- R.D. Katz, Max-Plus (A,B)-Invariant Spaces and Control of Timed Discrete-Event Systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 52, No. 2, pp. 229-241, 2007.
- S. Gaubert, R. Katz, Rational semimodules over the max-plus semiring and geometric approach to discrete event systems, Kybernetika, Vol. 40, No. 2, pp. 153-180, 2004.
- G. Cohen, S. Gaubert, and J. P. Quadrat. Kernels, images and projections in dioids, In Proc. WODES6, pp. 151-158, Edinburgh, 1996.
- S. Gaubert, R. Katz, The tropical analogue of polar cones, Linear Algebra and its Applications, 431, pp. 60825, 2009.
- M. Di Loreto, S. Gaubert, R. D. Katz, J. J. Loiseau, *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, SIAM J. Control & Optimization, Vol. 48, pp. 5606-5628, 2010.
- L. Hardouin, C.A. Maia, B. Cottenceau, M.Lhommeau, Observer Design for  $(\max, +)$  Linear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 55, No. 2, pp. 538-543, 2010.
- L. Hardouin, Y. Shang, C.A. Maia, B. Cottenceau, Observer-Based Controllers for Max-Plus Linear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 62, No. 5, pp. 2153-2165, 2017.
- D. Luenberger, An Introduction to Observers, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. ac-16, No. 6, 1971.
- P. Butkovič, G. Hegedüs, *An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra*, Ekonomicko-matematicky Obzor, Vol. 20, no. 2, pp. 203-215, 1984.

# Références bibliographiques

- X. Allamigeon, S. Gaubert, É. Goubault, *The tropical double description method*, In : Proceedings of the 27th Annual Symposium on the Theoretical Aspects of Computer Science STACS 2010, Nancy, France. pp.47-58, 2010.
- E. Wagner, Finitely generated moduloids, The existence and unicity problem for bases, *Discr. Math.* 98. 57-73, 1991.
- E. Wagner, Subdirect sum decomposition of finite dimensional pseudomodules, In Proc. 11th International Conference on Analysis and Optimisation of Systems G. Cohen and J. P. Quadrat Ed., Lecture notes in Control and Information Sciences, Vol. 199, Springer Verlag, pp. 320-331, 1994.
- E. Wagner, Strong Independence and Injectivity in Tropical Modules, in Contemporary Mathematics Vol 616, G.L. Litvinov, and S.N. Sergeev Eds. American Mathematical Society, to appear, May 2014.
- G. Cohen, S. Gaubert and J.P. Quadrat. Hahn-Banach Separation Theorem for Max-Plus Semimodules, in Optimal Control and Partial Differential Equations, J.L. Menaldi, E. Rofman and A. Sulem Eds, IOS Press 2001.
- D. Animobono, E. Zattoni, D. Scaradozzi, A.M. Perdon, G. Conte, *Synchronization and subsynchronization problems for switching max-plus systems : Structural solvability conditions*, IEEE Transactions on Automatic Control, 69(8), 5613619, 2024.
- C. Cardenas, J.J. Loiseau, C. Martinez, Controlled invariance and dynamic feedback for systems over semirings. In SIAM Conference on Control and its Applications. Paris, France, 2015.

## Remerciements et crédits

**Auteurs et intervenants** : Jean Jacques Loiseau, Claude Martinez.

Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la **Licence Creative Commons Attribution 4.0 International**.

Pour voir une copie de cette licence, visitez

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr>.