

# Réseaux de Petri Temporels

Formation sur les Systèmes à Événements Discrets (SED)

2<sup>e</sup> édition  
Mars 2025  
Nantes



## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

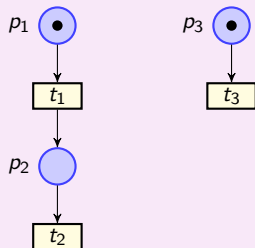
## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

# Présentation informelle

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

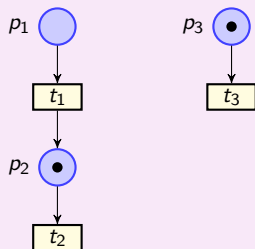
Exemple (Réseau de L. Gallon)



# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

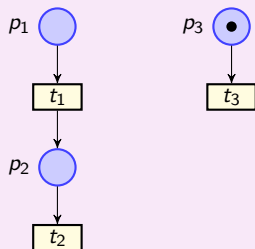
Exemple (Réseau de L. Gallon)



# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

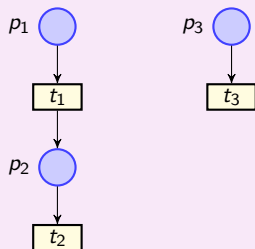
Exemple (Réseau de L. Gallon)



# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

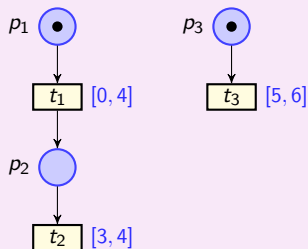
Exemple (Réseau de L. Gallon)



# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

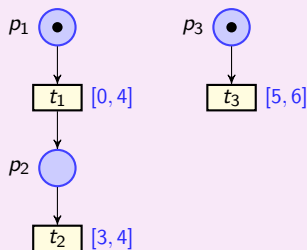
Exemple (Réseau de L. Gallon)



# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

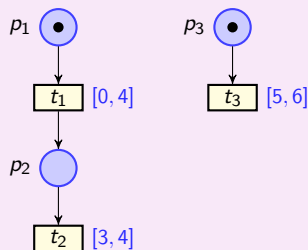


$$\{p_1, p_3\}$$
$$\nu(t_1) = 0$$
$$\nu(t_3) = 0$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

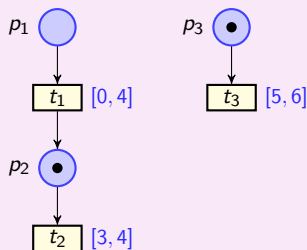


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 0 \\ \nu(t_3) = 0 \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 3.3 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

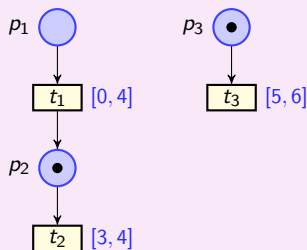


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 0 \\ \nu(t_3) = 0 \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 3.3 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \nu(t_2) = 0 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

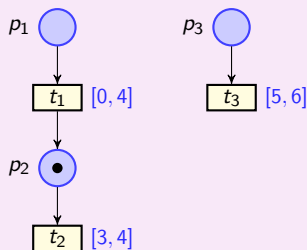


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 0 \\ \nu(t_3) = 0 \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 3.3 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \nu(t_2) = 0 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array} \xrightarrow{\epsilon(1,8)} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \nu(t_2) = 1.8 \\ \nu(t_3) = 5.1 \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

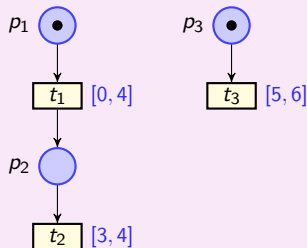


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 0 \\ \nu(t_3) = 0 \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \nu(t_1) = 3.3 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \nu(t_2) = 0 \\ \nu(t_3) = 3.3 \end{array} \xrightarrow{\epsilon(1,8)} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \nu(t_2) = 1.8 \\ \nu(t_3) = 5.1 \end{array} \xrightarrow{t_3} \dots$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)



$$\{p_1, p_3\}$$

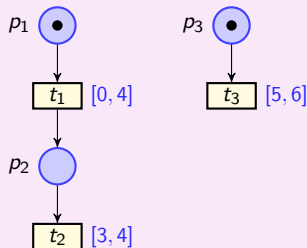
$$\theta(t_1) = [0, 4]$$

$$\theta(t_3) = [5, 6]$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

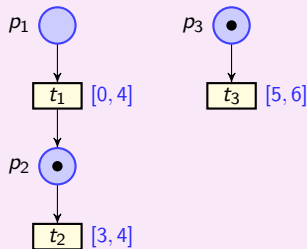


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 0.7] \\ \theta(t_3) = [1.7, 2.7] \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

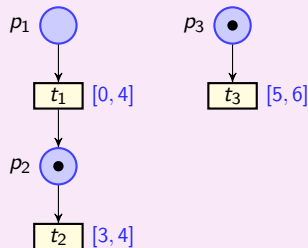


$$\begin{array}{ccc} \{p_1, p_3\} & \xrightarrow{\epsilon(3,3)} & \{p_1, p_3\} & \xrightarrow{t_1} & \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] & & \theta(t_1) = [0, 0.7] & & \theta(t_2) = [3, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] & & \theta(t_3) = [1.7, 2.7] & & \theta(t_3) = [1.7, 2.7] \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

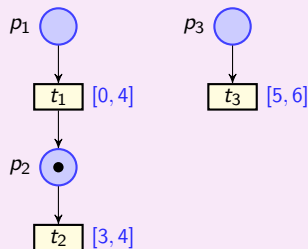


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 0.7] \\ \theta(t_3) = [1.7, 2.7] \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_2) = [3, 4] \\ \theta(t_3) = [1.7, 2.7] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(1,8)} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_2) = [1.2, 2.2] \\ \theta(t_3) = [0, 0.9] \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

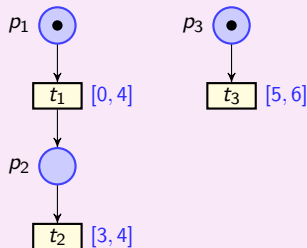


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3,3)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 0.7] \\ \theta(t_3) = [1.7, 2.7] \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_2) = [3, 4] \\ \theta(t_3) = [1.7, 2.7] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(1,8)} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_2) = [1.2, 2.2] \\ \theta(t_3) = [0, 0.9] \end{array} \xrightarrow{t_3} \dots$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)



$\{p_1, p_3\}$

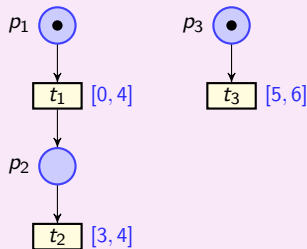
$\theta(t_1) = [0, 4]$

$\theta(t_3) = [5, 6]$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)

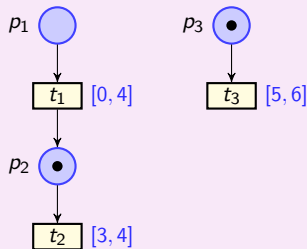


$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(0,5)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 3.5] \\ \theta(t_3) = [4.5, 5.5] \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

## Exemple (Réseau de L. Gallon)

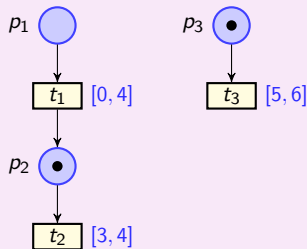


$$\begin{array}{ccc} \{p_1, p_3\} & \xrightarrow{\epsilon^{(0,5)}} & \{p_1, p_3\} & \xrightarrow{t_1} & \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] & & \theta(t_1) = [0, 3.5] & & \theta(t_2) = [3, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] & & \theta(t_3) = [4.5, 5.5] & & \theta(t_3) = [4.5, 5.5] \end{array}$$

# Réseau de Petri T-temporel ( $T$ -TPN)

$T$ -TPN [Merlin, 1974] : Les contraintes temporelles sont associées aux transitions

Exemple (Réseau de L. Gallon)



$$\begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 4] \\ \theta(t_3) = [5, 6] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(0.5)} \begin{array}{l} \{p_1, p_3\} \\ \theta(t_1) = [0, 3.5] \\ \theta(t_3) = [4.5, 5.5] \end{array} \xrightarrow{t_1} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_2) = [3, 4] \\ \theta(t_3) = [4.5, 5.5] \end{array} \xrightarrow{\epsilon(3.8)} \begin{array}{l} \{p_2, p_3\} \\ \theta(t_2) = [0, 0.2] \\ \theta(t_3) = [0.7, 1.7] \end{array} \xrightarrow{t_2} \dots$$

## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

# Définition et sémantique

## Definition

Un Réseau de Petri Temporel  $\mathcal{N}$  est un n-uplet  $(P, T, \bullet(\cdot), (\cdot)\bullet, M_0, I_s)$  où  $I_s : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$  est l'intervalle de tir statique  
On note  $I_s(t) = [\alpha(t), \beta(t)]$  (ou  $[\alpha(t), \beta(t)[$  lorsque  $\beta(t) = \infty$ )

## Definition

Un Réseau de Petri Temporel  $\mathcal{N}$  est un n-uplet  $(P, T, \bullet(\cdot), (\cdot)\bullet, M_0, I_s)$  où  $I_s : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$  est l'intervalle de tir statique  
On note  $I_s(t) = [\alpha(t), \beta(t)]$  (ou  $[\alpha(t), \beta(t)[$  lorsque  $\beta(t) = \infty$ )

## Definition

L'Etat d'un  $T$ -TPN est  $s = (M, I)$  avec

- $M$  : marquage
- $I$  : intervalle de tir dynamique

# Definition et Sémantique des $T$ -TPN

## Definition

Un Réseau de Petri Temporel  $\mathcal{N}$  est un n-uplet  $(P, T, \bullet(\cdot), (\cdot)\bullet, M_0, I_s)$  où  $I_s : T \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} \times (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$  est l'intervalle de tir statique. On note  $I_s(t) = [\alpha(t), \beta(t)[$  (ou  $[\alpha(t), \beta(t)[$  lorsque  $\beta(t) = \infty$ )

## Definition

L'Etat d'un  $T$ -TPN est  $s = (M, I)$  avec

- $M$  : marquage
- $I$  : intervalle de tir dynamique

## Definition

- La sémantique d'un TPN  $\mathcal{N}$  est un Système de Transitions Temporisés  $S_{\mathcal{N}} = (Q, (M_0, I_s), T, \rightarrow)$

On note  $En(M) = \{t \in T, | M \geq \bullet t\}$

## Definition (Sémantique des réseaux de Petri temporels )

- **Etats** :  $(M, I)$

On note  $En(M) = \{t \in T, | M \geq \bullet t\}$

## Definition (Sémantique des réseaux de Petri temporels )

- **Etats** :  $(M, I)$
- **Transition discrète** :  $(M, I) \xrightarrow{t} (M', I')$  ssi
$$\begin{cases} t \in En(M) \text{ et } M' = M - \bullet t + t \bullet \\ 0 \in I(t) \\ I'(t') = I_s(t') \text{ si } t' \text{ est nouvellement sensibilisée, } I'(t') = I(t') \text{ sinon} \end{cases}$$

On note  $En(M) = \{t \in T, | M \geq \bullet t\}$

## Definition (Sémantique des réseaux de Petri temporels )

- **Etats** :  $(M, I)$
- **Transition discrète** :  $(M, I) \xrightarrow{t} (M', I')$  ssi
$$\begin{cases} t \in En(M) \text{ et } M' = M - \bullet t + t \bullet \\ 0 \in I(t) \\ I'(t') = I_s(t') \text{ si } t' \text{ est nouvellement sensibilisée, } I'(t') = I(t') \text{ sinon} \end{cases}$$
- **Transition temporisée** :  $(M, \nu) \xrightarrow{d} (M', \nu')$  ssi
$$\begin{cases} M = M' \\ \forall t \in En(M), \beta(t) - d > 0 \quad (\text{sémantique forte}) \\ I' = I - d \end{cases}$$

## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

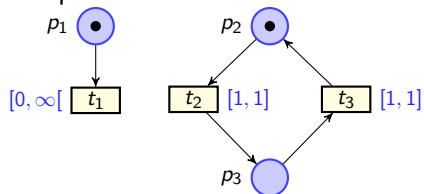
## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

# Exploration de l'espace d'état

- par **simulation**

# Exploration de l'espace d'état

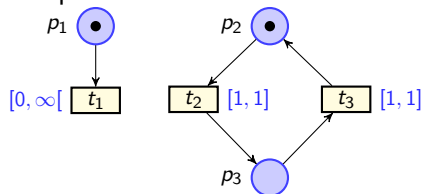
• par **simulation**



$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

# Exploration de l'espace d'état

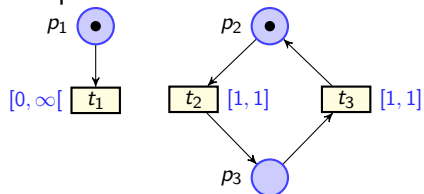
• par **simulation**



$$\begin{pmatrix} 1 & \left| \begin{array}{l} [0, \infty[ \\ 1, \\ 0 \end{array} \right. \\ \times \end{pmatrix} \xrightarrow{0} \begin{pmatrix} 1 & \left| \begin{array}{l} [0, \infty[ \\ [1 - \delta, 1 - \delta] \\ \times \end{array} \right. \\ \times \end{pmatrix}$$

# Exploration de l'espace d'état

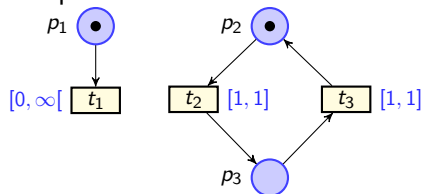
• par **simulation**



$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[0.7]{0} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

# Exploration de l'espace d'état

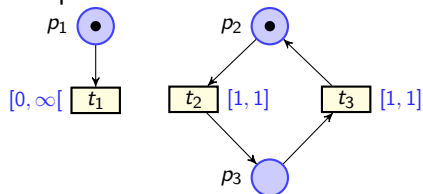
• par **simulation**



$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}]{\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

# Exploration de l'espace d'état

• par **simulation**

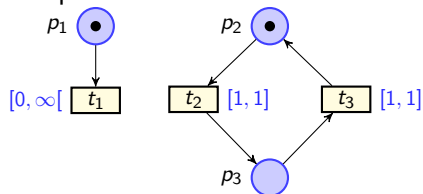


$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}]{\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

→ Infinité de branchements, d'états L'espace d'états d'un TPN est **infini** (en général)

# Exploration de l'espace d'état

- par **simulation**



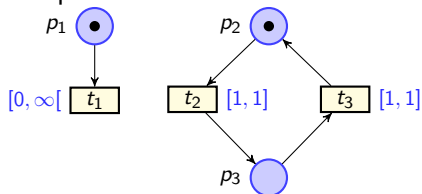
$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} 0 \\ 0.7 \\ \dots \\ 1 \end{array}]{\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

→ Infinité de branchements, d'états L'espace d'états d'un TPN est **infini** (en général)

- **symbolique**

# Exploration de l'espace d'état

- par **simulation**



$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}]{\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

→ Infinité de branchements, d'états L'espace d'états d'un TPN est **infini** (en général)

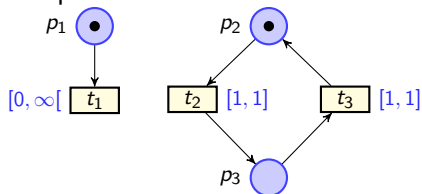
- **symbolique**

- Regrouper les états en classes d'**équivalence** (abstraction) :

$$\theta_2 \in [1, 1] \xrightarrow{\delta \in [0, 1]} \rightarrow$$

# Exploration de l'espace d'état

- par **simulation**



$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} 0 \\ 0.7 \\ \dots \\ 1 \end{array}]{0} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

→ Infinité de branchements, d'états L'espace d'états d'un TPN est **infini** (en général)

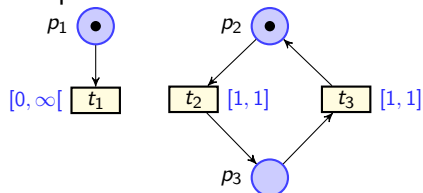
- **symbolique**

- Regrouper les états en classes d'**équivalence** (abstraction) :

$$\theta_2 \in [1, 1] \xrightarrow{\delta \in [0, 1]} \theta_2 \in [0, 1]$$

# Exploration de l'espace d'état

- par **simulation**



$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1, 1] \\ 0 & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} 0 \\ 0.7 \\ \dots \\ 1 \end{array}]{\begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0.7} \\ \dots \\ \xrightarrow{1} \end{array}} \left( \begin{array}{c|c} 1 & [0, \infty[ \\ 1, & [1 - \delta, 1 - \delta] \\ 0 & \times \end{array} \right)$$

→ Infinité de branchements, d'états L'espace d'états d'un TPN est **infini** (en général)

- **symbolique**

- Regrouper les états en classes d'**équivalence** (abstraction) :

$$\theta_2 \in [1, 1] \xrightarrow{\delta \in [0, 1]} \theta_2 \in [0, 1]$$

- Graphe des classes [Berthomieu and Menasche, 1983, Berthomieu and Diaz, 1991]
- Graphe des regions [Alur et al., 1990]
- Graphe des zones [Henzinger et al., 1992]

### Definition (Classe d'états)

$$Q = (M, \mathcal{D})$$

- $M$  : un marquage,
- $\mathcal{D}$  : Domaine temporel pour lequel  $M$  existe.

## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

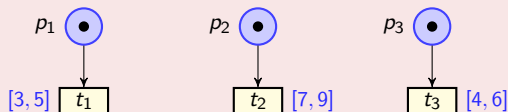
## 3 Exercice, calcul du successeur

- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

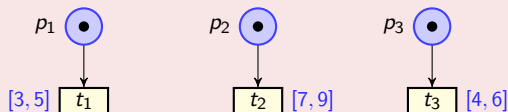
# Intuition

## Intuition



- Représenter les intervalles de tir des transitions  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  avec des variables d'intervalles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$
- Déterminer les transitions franchissables.
- Déterminer intuitivement (sans contrainte diagonale) les intervalles de tir des transitions  $t_2$  et  $t_3$  après le tir de  $t_1$ .

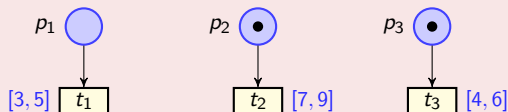
## Intuition



$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right)$$

- Peut-on avoir  $\theta_2 \leq \theta_1$  ?
- Peut-on avoir  $\theta_3 \leq \theta_2$  ?
- Peut-on avoir  $\theta_3 \leq \theta_1$  ?  
Peut-on avoir  $\theta_1 \leq \theta_3$  ?

## Intuition

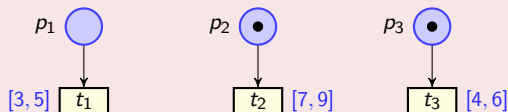


$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right)$$

- Peut-on avoir  $\theta_2 \leq \theta_1$  ?  
**Non** car  $\alpha_2 > \beta_1$  donc  $t_1$  doit tirer avant  $t_2$
- Peut-on avoir  $\theta_3 \leq \theta_2$  ?  
**Non** car  $\alpha_2 > \beta_3$  donc  $t_3$  doit tirer avant  $t_2$
- Peut-on avoir  $\theta_3 \leq \theta_1$  ?  
Peut-on avoir  $\theta_1 \leq \theta_3$  ?  
**Oui** car  $\alpha_3 \leq \beta_1$  et  $\alpha_1 \leq \beta_3$  donc  $t_1$  et  $t_2$  sont tirables

# Calcul de l'espace d'états - Graphe des classes d'états

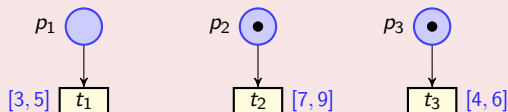
## Intuition



$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Tir de } t_1$$

On essaye de calculer les intervalles de tir de  $t_2$  and  $t_3$  dans le pire cas.

## Intuition



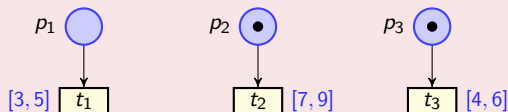
$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Tir de } t_1$$

On essaye de calculer les intervalles de tir de  $t_2$  and  $t_3$  dans le pire cas.

$$\left( \begin{array}{l} 7 - 5 \leq \theta_2 \leq 9 - 3 \\ \max(0, 4 - 5) \leq \theta_3 \leq 6 - 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \end{array} \right)$$

# Calcul de l'espace d'états - Graphe des classes d'états

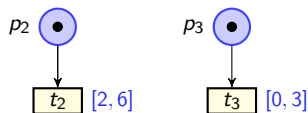
## Intuition



$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Tir de } t_1$$

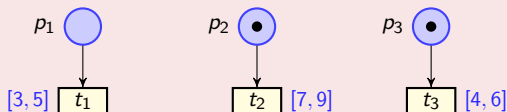
On essaye de calculer les intervalles de tir de  $t_2$  and  $t_3$  dans le pire cas.

$$\begin{pmatrix} 7 - 5 \leq \theta_2 \leq 9 - 3 \\ \max(0, 4 - 5) \leq \theta_3 \leq 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \end{pmatrix}$$



# Calcul de l'espace d'états - Graphe des classes d'états

## Intuition

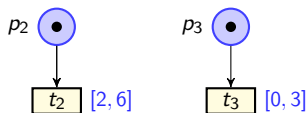


$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Tir de } t_1$$

On essaye de calculer les intervalles de tir de  $t_2$  and  $t_3$  dans le pire cas.

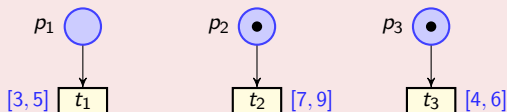
$$\begin{pmatrix} 7 - 5 \leq \theta_2 \leq 9 - 3 \\ \max(0, 4 - 5) \leq \theta_3 \leq 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \end{pmatrix}$$

Mais ici  $t_2$  est tirable avant  $t_3$   
alors que ce n'est pas le cas



# Calcul de l'espace d'états - Graphe des classes d'états

## Intuition



$$(M_0, \mathcal{D}_0) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Tir de } t_1$$

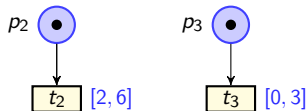
On essaye de calculer les intervalles de tir de  $t_2$  and  $t_3$  dans le pire cas.

$$\begin{pmatrix} 7 - 5 \leq \theta_2 \leq 9 - 3 \\ \max(0, 4 - 5) \leq \theta_3 \leq 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \end{pmatrix}$$

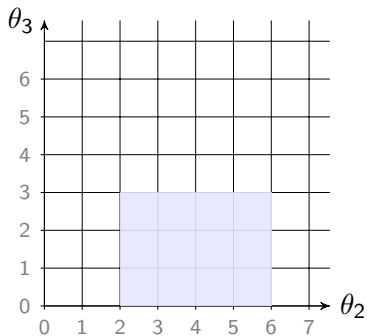
Mais ici  $t_2$  est tirable avant  $t_3$   
alors que ce n'est pas le cas

**Il manque les contraintes diagonales !**

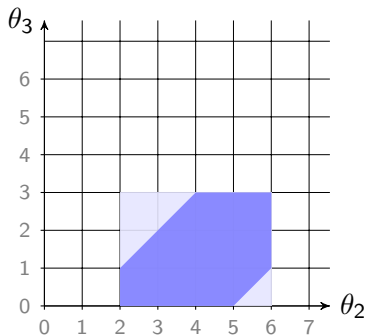
$$7 - 6 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 9 - 4 \Rightarrow 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5$$



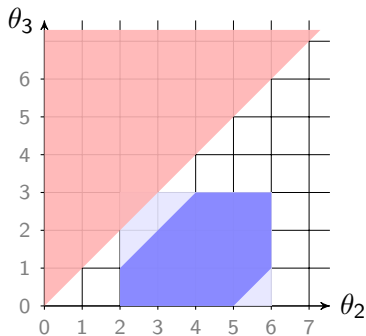
$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \end{array} \right. \cap \theta_2 \leq \theta_3 = \emptyset$$



## Classe d'états

Système d'inéquations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{i_{min}} \leq \theta_i \leq \theta_{i_{max}} \\ \theta_{j_{min}} \leq \theta_j \leq \theta_{j_{max}} \\ \dots \\ \theta_{ji_{min}} \leq \theta_j - \theta_i \leq \theta_{ji_{max}} \\ \dots \end{array} \right.$$

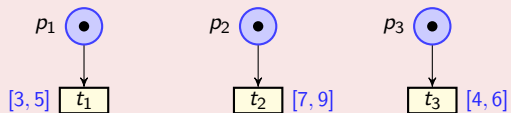
La classe initiale est obtenue à partir des intervalles statiques  $I = [\alpha, \beta]$  ou  $I = [\alpha, \beta[$  si  $\beta = \infty$ .

Pour 2 transitions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \leq \theta_i \leq \beta_i \\ \alpha_j \leq \theta_j \leq \beta_j \\ \alpha_j - \beta_i \leq \theta_j - \theta_i \leq \beta_j - \alpha_i \end{array} \right.$$

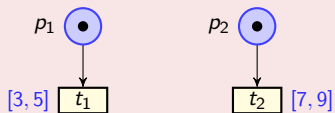
# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale



# Déterminer les transitions franchissables

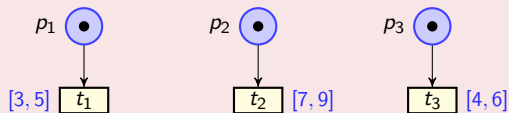
## Classe initiale



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

# Déterminer les transitions franchissables

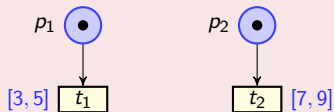
## Classe initiale



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

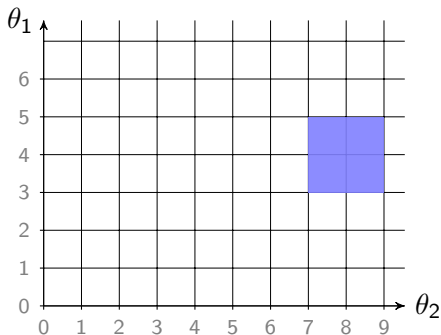
# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale



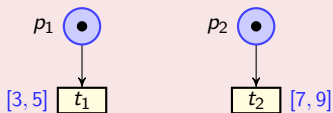
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \theta_1 \leq \theta_2? \\ \theta_2 \leq \theta_1? \end{array}$$



# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale

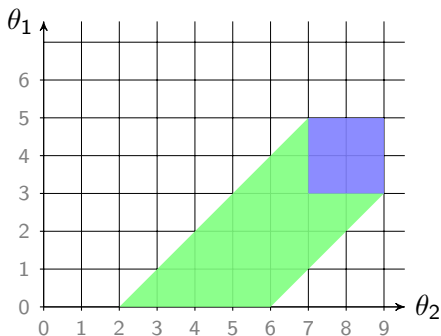


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

$$\theta_1 \leq \theta_2?$$

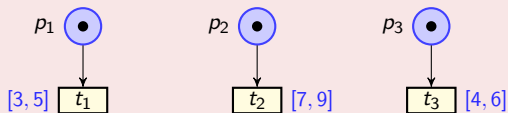
$$\theta_2 \leq \theta_1?$$

$t_2$  n'est pas tirable

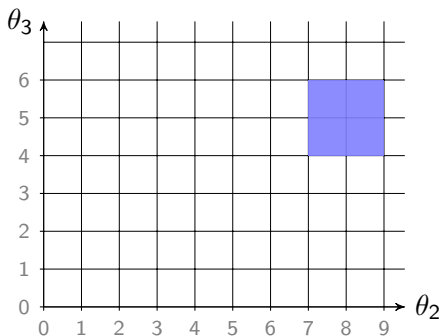


# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale

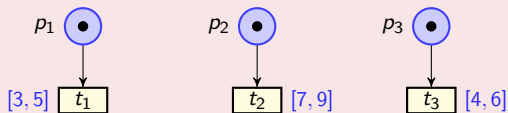


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

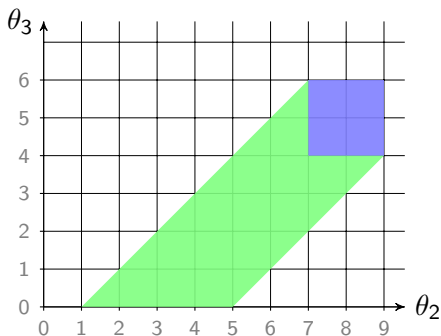


# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale



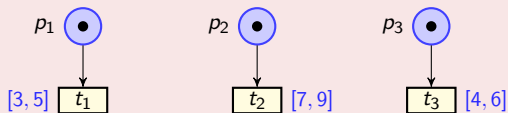
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$



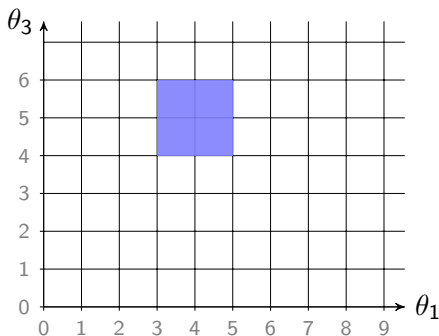
$t_2$  n'est pas tirable

# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale

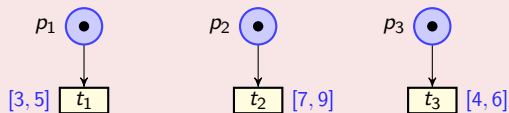


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

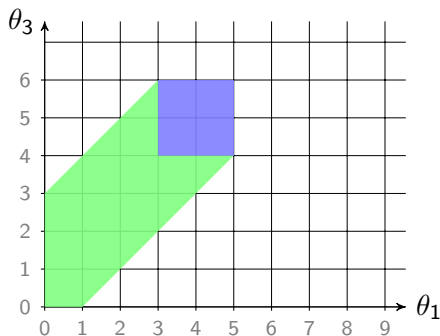


# Déterminer les transitions franchissables

## Classe initiale



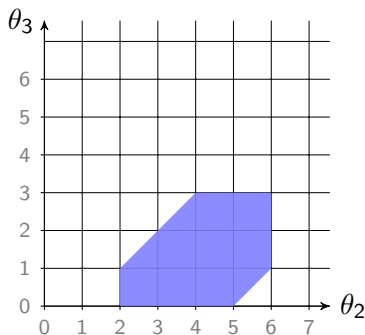
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$



$t_1$  et  $t_3$  sont tirables

On reprend la classe obtenue intuitivement après le tir de  $t_1$

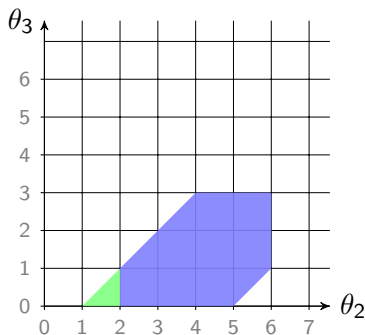
$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \end{array} \right.$$



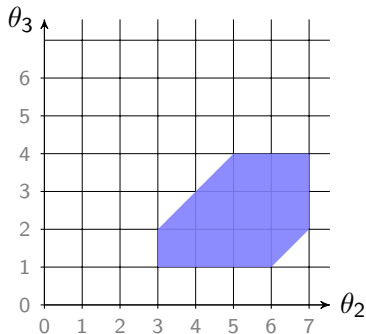
On reprend la classe obtenue intuitivement après le tir de  $t_1$

$$\begin{cases} 2 \leq \theta_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \end{cases}$$

$t_3$  est tirable après écoulement du temps mais pas  $t_2$

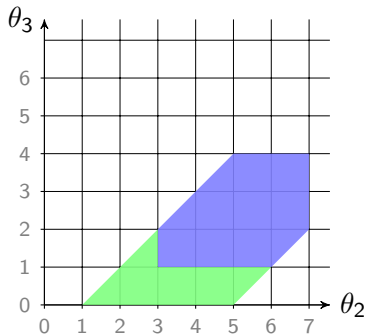


Si on avait eu  $\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_2 \leq 7 \\ 1 \leq \theta_3 \leq 4 \\ 1 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq 5 \end{array} \right.$



Si on avait eu  $\begin{cases} 3 \leq \theta_2 \leq 7 \\ 1 \leq \theta_3 \leq 4 \\ 1 \leq \theta_3 - \theta_2 \leq 5 \end{cases}$

$t_3$  est tirable après écoulement du temps mais pas  $t_2$



## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

## Calcul du successeur

## Franchissement de $t_f$ à partir d'une classe d'états

$$\left( M, \mathcal{D} = \begin{cases} \theta_{i_{min}} \leq \theta_i \leq \theta_{i_{max}} \\ \theta_{j_{min}} \leq \theta_j \leq \theta_{j_{max}} \\ \dots \\ \theta_{j'_{min}} \leq \theta_j - \theta_i \leq \theta_{j'_{max}} \\ \dots \end{cases} \right) \xrightarrow{t_f} (M', \mathcal{D}')$$

- $M' = M - \bullet t_f + t_f \bullet$
- On calcule le nouveau domaine  $\mathcal{D}'$  en retranchant  $\theta_f$  :

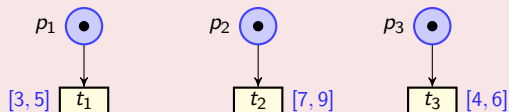
$$\forall \theta_j \neq \theta_i, \quad \theta'_j = \theta_j - \theta_f$$

Cela qui revient à un changement de variables :  $\theta_j = \theta'_j + \theta_f$

Successeur de  $(M, \mathcal{D})$  par le tir de  $t_f$  :  $(M, \mathcal{D}) \xrightarrow{t_f} (M', \mathcal{D}')$

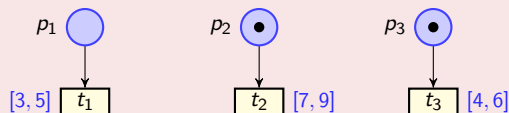
- $M' = M - \bullet t_f + t_f \bullet$
- Le nouveau domaine de tir,  $\mathcal{D}'$ , est calculé selon les étapes suivantes. Nous le noterons  $\mathcal{D}' = \text{next}(\mathcal{D}, t_f)$ 
  - 1 Changements de variables  $\forall t_j \neq t_f, \theta_j = \theta_f + \theta'_j$
  - 2  $\forall t_j \neq t_f$ , ajout des contraintes  $\theta'_j \geq 0$
  - 3 **Elimination** des variables correspondant à des transitions désensibilisées par le tir de  $t_f$  (ce qui inclut donc  $t_f$ ), par exemple en utilisant la méthode de Fourier-Motzkin ;
  - 4 **Ajout** des inéquations relatives aux transitions  $t_k$  nouvellement sensibilisées par le tir de  $t_f$  :  $\alpha_k \leq \theta'_k \leq \beta_k$  et des contraintes diagonales associées.
  - 5 Calcul de la forme **canonique**  $\mathcal{D}'^*$  du nouveau domaine de tir.

$next(M_0, t_1)$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

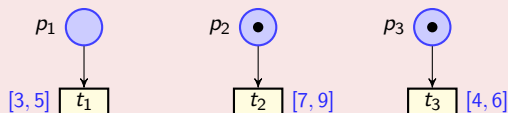
$next(M_0, t_1)$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 9 \\ 4 \leq \theta'_3 + \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta'_3 + \theta_1 - \theta_1 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 + \theta_1 - \theta_1 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_2 \\ 0 \leq \theta'_3 \end{array} \right.$$

$next(M_0, t_1)$



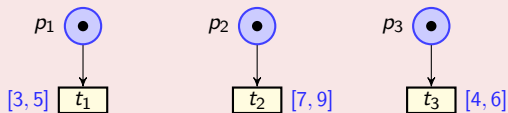
$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 9 \\ 4 \leq \theta'_3 + \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta'_3 + \theta_1 - \theta_1 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 + \theta_1 - \theta_1 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_2 \\ 0 \leq \theta'_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 9 \\ 4 \leq \theta'_3 + \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ 0 \leq \theta'_3 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 \leq 6 \end{cases}$$

## The fourier Motzkin method

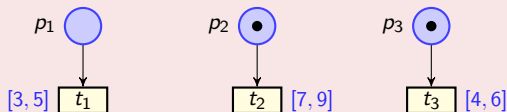
- Let us consider  $\begin{cases} 3 \leq x_1 \leq 5 \\ -2 \leq x_2 \leq 6 \\ 4 \leq x_1 - x_2 \leq 7 \end{cases}$  We want to eliminate  $x_1$
- $x_1$  is not involved in the inequation  $-2 \leq x_2 \leq 6$
- We calculate what is smaller than  $x_1$  and what is greater than  $x_1$ 
  - $\begin{cases} 3 \leq x_1 \\ 4 + x_2 \leq x_1 \end{cases} \leq \begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 + x_2 \end{cases}$
- We now eliminate  $x_1$ 
  - $\begin{cases} 3 \leq 5 \\ 3 \leq 7 + x_2 \\ 4 + x_2 \leq 5 \\ 4 + x_2 \leq 7 + x_2 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x_2 \leq 1$
- Finally  $\begin{cases} -2 \leq x_2 \leq 6 \\ -4 \leq x_2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x_2 \leq 1$

$next(M_0, t_1)$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$next(M_0, t_1)$

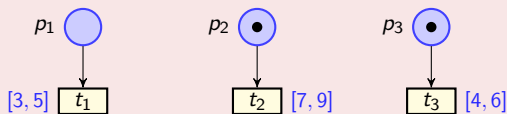


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 9 \\ 4 \leq \theta'_3 + \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ 0 \leq \theta'_3 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 \leq 6 \end{array} \right.$$

Elimination de  $\theta_1$

$next(M_0, t_1)$



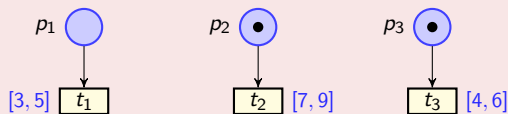
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 9 \\ 4 \leq \theta'_3 + \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ 0 \leq \theta'_3 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 \leq 6 \end{array} \right.$$

Elimination de  $\theta_1$

On a  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ 0 \leq \theta'_3 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 \leq 6 \end{array} \right.$  et  $\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \\ 7 - \theta'_2 \leq \theta_1 \\ 4 - \theta'_3 \leq \theta_1 \end{array} \right. \leq \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \leq 5 \\ \theta_1 \leq 9 - \theta'_2 \\ \theta_1 \leq 6 - \theta'_3 \end{array} \right.$

$next(M_0, t_1)$



$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 9 \\ 4 \leq \theta'_3 + \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \\ 0 \leq \theta'_3 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 \leq 6 \end{cases}$$

Elimination de  $\theta_1$

$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \\ 7 - \theta'_2 \leq \theta_1 \\ 4 - \theta'_3 \leq \theta_1 \end{cases} \leq \begin{cases} \theta_1 \leq 5 \\ \theta_1 \leq 9 - \theta'_2 \\ \theta_1 \leq 6 - \theta'_3 \end{cases} \quad \mathcal{D}' = \begin{cases} 2 \leq \theta'_2 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_3 \leq 3 \\ 1 \leq \theta'_2 - \theta'_3 \leq 5 \end{cases}$$

## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

# Convergence et terminaison

# Algorithme de base du calcul d'un espace d'états

## Algorithme

Ensemble des états symboliques à explorer :  $Waiting \leftarrow \mathcal{Q}_0 = (M_0, \mathcal{D}_0)$ .

Ensemble des états symboliques explorés :  $Visited \leftarrow \emptyset$

Tant que  $Waiting \neq \emptyset$

- $Q \leftarrow pop(Waiting)$
- Calcul des transitions franchissables à partir de  $Q$  :  $fireable(Q)$
- pour toute transition  $t \in fireable(Q)$ 
  - Calcul du successeur de  $Q$  par le tir de  $t$  :  $next(Q, t)$
  - if  $next(Q, t) \notin (Waiting \cup Visited)$   
then  $Waiting \leftarrow Waiting \cup next(Q, t)$
- $Visited \leftarrow Visited \cup Q$

# Calcul du graphe des classes d'états - Convergence

Dans l'algorithme général de calcul de l'espace d'états, la convergence est déterminée par **if**  $next(Q, t) \notin (Waiting \cup Visited)$

## Convergence

Lors du calcul du graphe des classes, on peut converger

- par égalité de classes (le graphe preserve alors les marquages et le langage)
- par inclusion du domaine des classes (le graphe ne preserve que l'accessibilité des marquages).

Rappelons que les réseaux de Petri temporels sont Turing-complet.  
Nous considérons donc des réseaux bornés.

Theorem ([Berthomieu and Diaz, 1991])

*L'algorithme de calcul du graphe des classes d'états termine pour les réseaux de Petri temporels bornés*

Rappelons que les réseaux de Petri temporels sont Turing-complet.  
Nous considérons donc des réseaux bornés.

**Theorem ([Berthomieu and Diaz, 1991])**

*L'algorithme de calcul du graphe des classes d'états **termine** pour les réseaux de Petri temporels **bornés***

Pas besoin de k-approximation

Rappelons que les réseaux de Petri temporels sont Turing-complet.  
Nous considérons donc des réseaux bornés.

## Theorem ([Berthomieu and Diaz, 1991])

*L'algorithme de calcul du graphe des classes d'états **termine** pour les réseaux de Petri temporels **bornés***

Pas besoin de k-approximation

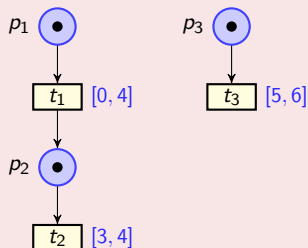
## Implémentations dans les outils :

- Tina [Berthomieu et al., 2004]
- ORIS [Bucci et al., 2010]
- ROMÉO [Lime et al., 2009]

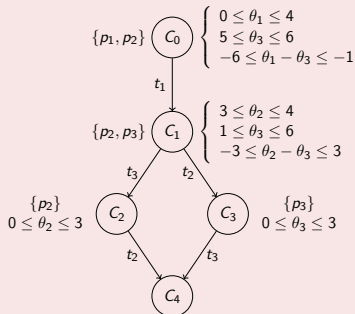
# Comment interpréter le graphe des classes ?

Exemple : graphe des classes d'états [Berthomieu and Diaz, 1991]

## Réseau de L. Gallon



## Graphe des classes



## Abstraction en fonction du type de propriété considéré

- Propriété d'accessibilité : calcul de l'ensemble des classes [Berthomieu and Diaz, 1991] ou des zones. (convergence par inclusion)
- Propriété sur des traces (LTL) : graphe des classes [Berthomieu and Diaz, 1991] ou graphe des zones.
- Propriété arborescentes (CTL) : graphe des classes atomiques [Berthomieu and Vernadat, 2003]

## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

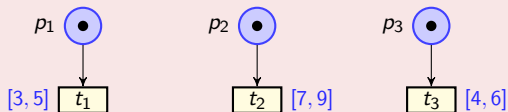
- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

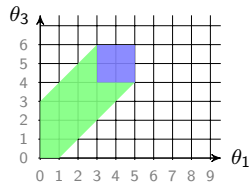
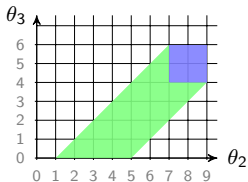
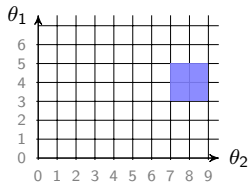
On reprend le même exemple mais on regarde le tir de  $t_3$

# Exercice : Tir de $t_3$

## Classe initiale

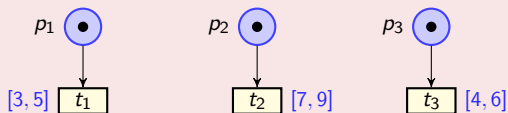


$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{cases}$$



# Exercice : Tir de $t_3$

## Classe initiale



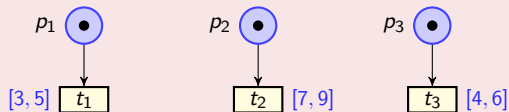
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

## $\mathcal{D}' = next(\mathcal{D}, t_3)$

- 1 Changements de variables  $\forall t_j \neq t_3, \theta_j = \theta_3 + \theta'_j$
- 2  $\forall t_j \neq t_3$ , ajout des contraintes  $\theta'_j \geq 0$
- 3 **Elimination** par Fourier-Motzkin des variables des transitions désensibilisées : ici seulement  $t_3$
- 4 **Ajout** des transitions nouvellement sensibilisées : ici aucune
- 5 Calcul de la forme **canonique**  $\mathcal{D}'^*$  du nouveau domaine de tir.

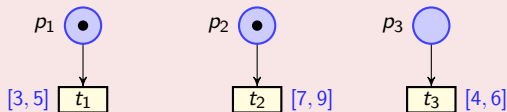
# Calcul de next

$$\text{next}(M_0, t_3) : \forall t_j \neq t_3, \theta_j = \theta_3 + \theta'_j$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\text{next}(M_0, t_3) : \forall t_j \neq t_3, \theta_j = \theta_3 + \theta'_j$$

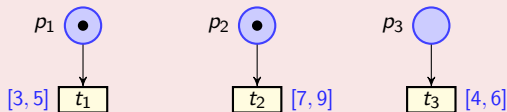


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_3 + \theta'_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_3 + \theta'_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_3 + \theta'_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_3 - \theta'_1 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_1 \\ 0 \leq \theta'_2 \end{array} \right.$$

# Calcul de next

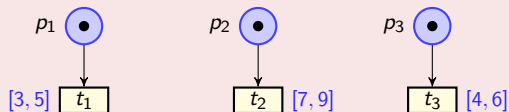
$$\text{next}(M_0, t_3) : \forall t_j \neq t_3, \theta_j = \theta_3 + \theta'_j$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

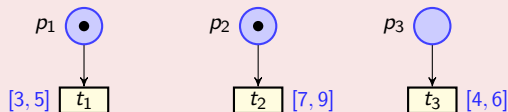
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_3 + \theta'_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_3 + \theta'_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_3 + \theta'_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_3 - \theta'_1 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_1 \\ 0 \leq \theta'_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 3 \leq \theta_3 + \theta'_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_3 + \theta'_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

$next(M_0, t_3)$  : Elimination de  $\theta_3$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$next(M_0, t_3)$  : Elimination de  $\theta_3$

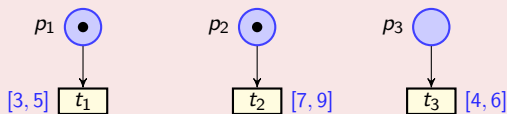


$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 3 \leq \theta_3 + \theta'_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_3 + \theta'_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

Elimination de  $\theta_3$

$next(M_0, t_3)$  : Elimination de  $\theta_3$



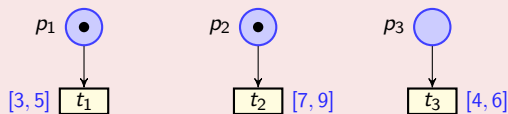
$$\begin{cases} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 3 \leq \theta_3 + \theta'_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_3 + \theta'_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$

Elimination de  $\theta_3$

On a  $\begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$  et  $\begin{cases} 4 \leq \theta_3 \\ 3 - \theta'_1 \leq \theta_3 \\ 7 - \theta'_2 \leq \theta_3 \end{cases} \leq \begin{cases} \theta_3 \leq 6 \\ \theta_3 \leq 5 - \theta'_1 \\ \theta_3 \leq 9 - \theta'_2 \end{cases}$

$next(M_0, t_3)$  : Elimination de  $\theta_3$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq \theta_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_2 \leq 9 \\ 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 6 \\ 1 \leq \theta_2 - \theta_3 \leq 5 \\ -1 \leq \theta_3 - \theta_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

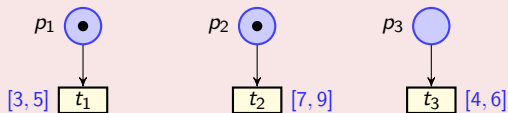
$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 3 \leq \theta_3 + \theta'_1 \leq 5 \\ 7 \leq \theta_3 + \theta'_2 \leq 9 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

Elimination de  $\theta_3$

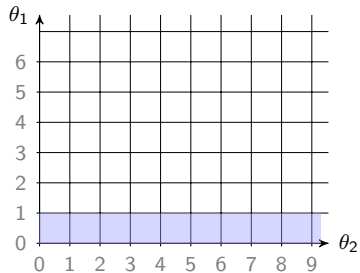
$$\mathcal{D}' = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

# Calcul de next

$next(M_0, t_3)$  : Forme canonique  $\theta_3$

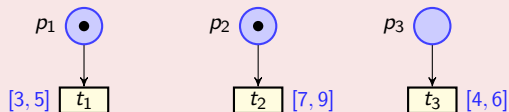


$$\mathcal{D}' = \begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$

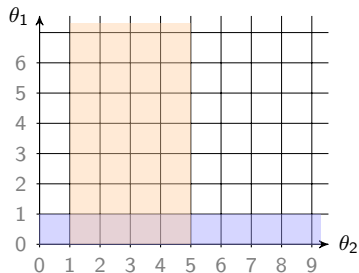


# Calcul de next

$next(M_0, t_3)$  : Forme canonique  $\theta_3$

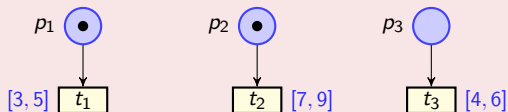


$$\mathcal{D}' = \begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$

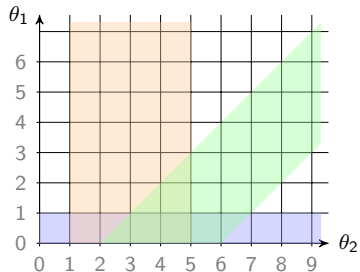


# Calcul de next

$next(M_0, t_3)$  : Forme canonique  $\theta_3$

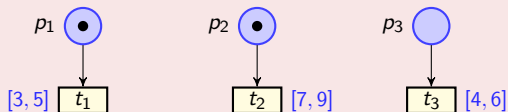


$$\mathcal{D}' = \begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$

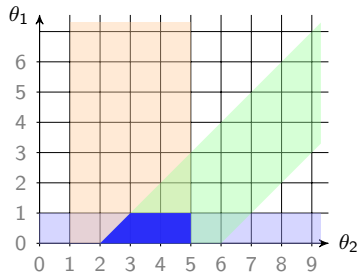


# Calcul de next

$next(M_0, t_3)$  : Forme canonique  $\theta_3$



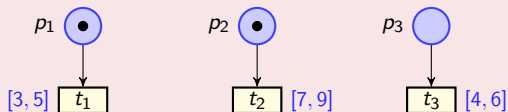
$$\mathcal{D}' = \begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$



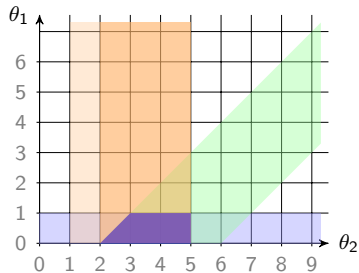
$$\mathcal{D}_2 = \begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq 1 \end{cases}$$

# Calcul de next

$next(M_0, t_3)$  : Forme canonique  $\theta_3$



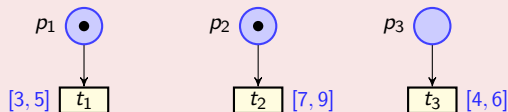
$$\mathcal{D}' = \begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$



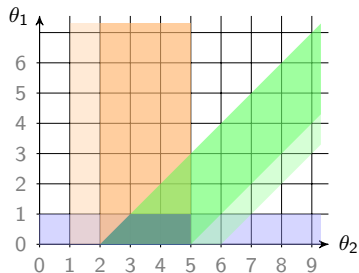
$$\mathcal{D}_2 = \begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq 1 \\ 2 \leq \theta_2 \leq 5 \end{cases}$$

# Calcul de next

$next(M_0, t_3)$  : Forme canonique  $\theta_3$



$$\mathcal{D}' = \begin{cases} 0 \leq \theta'_1 \leq 1 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 - \theta'_1 \leq 6 \end{cases}$$



$$\mathcal{D}_2 = \begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq 1 \\ 2 \leq \theta_2 \leq 5 \\ 2 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 5 \end{cases}$$

## 1 Les réseaux de Petri T-temporels

- Présentation informelle
- Définition et sémantique

## 2 Graphe des classes d'états

- Intuition
- Calcul du successeur
- Convergence et terminaison

## 3 Exercice, calcul du successeur

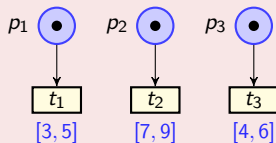
- Tir de  $t_3$
- Calcul du graphe complet

## 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

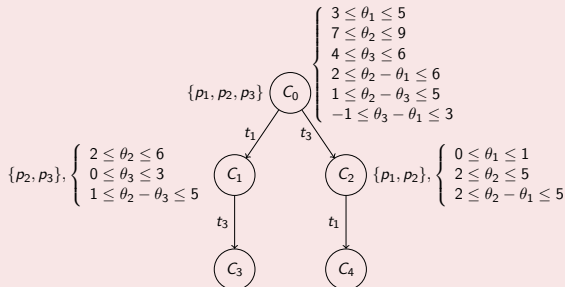
## Calcul du graphe complet

# Exercice : Calcul du graphe

## Le réseau

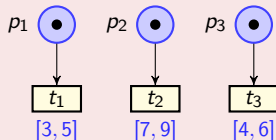


## Graphe des classes

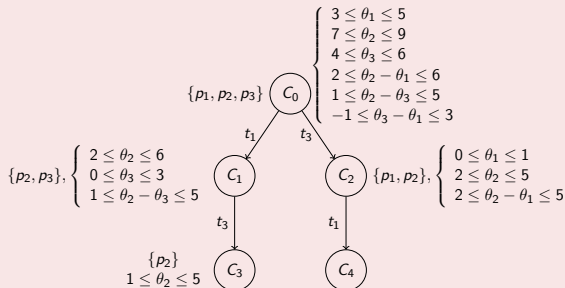


# Exercice : Calcul du graphe

## Le réseau



## Graphe des classes



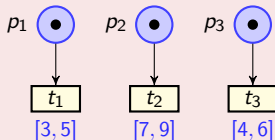
$C_1 \xrightarrow{t_3} C_3$

$$\begin{cases} 2 \leq \theta'_2 + \theta_3 \leq 6 \\ 0 \leq \theta_3 \leq 3 \\ 1 \leq \theta'_2 + \theta_3 - \theta_3 \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \leq \theta_3 \leq 3 \\ 2 \leq \theta'_2 + \theta_3 \leq 6 \\ 1 \leq \theta'_2 \leq 5 \end{cases}$$

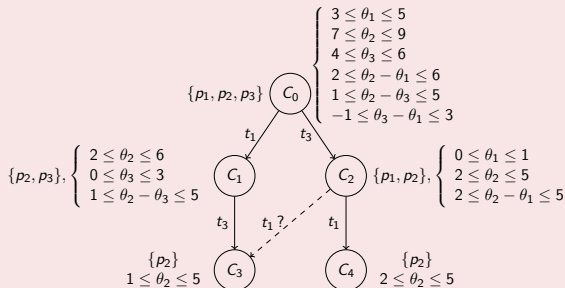
$$\begin{cases} 0 \leq \theta_3 \\ 2 - \theta'_2 \leq \theta_3 \end{cases} \leq \begin{cases} \theta_3 \leq 3 \\ \theta_3 \leq 6 - \theta'_2 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq \theta'_2 \leq 5$$

# Exercice : Calcul du graphe

## Le réseau



## Graphe des classes



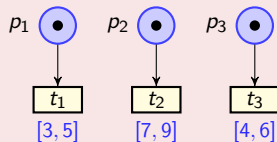
$C_2 \xrightarrow{t_1} C_4$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq 1 \\ 2 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 + \theta_1 - \theta_1 \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \leq \theta_3 \leq 1 \\ 2 \leq \theta'_2 + \theta_1 \leq 5 \\ 2 \leq \theta'_2 \leq 5 \end{cases}$$

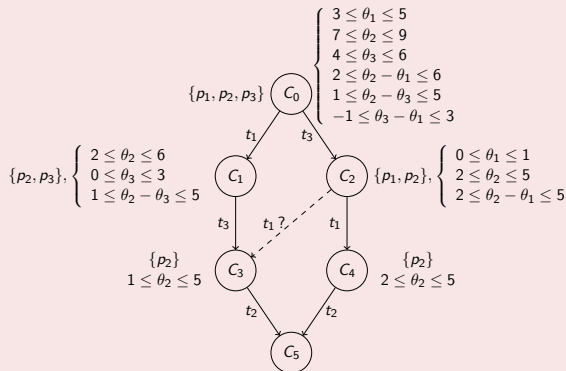
$$\begin{cases} 0 \leq \theta_1 \\ 2 - \theta'_2 \leq \theta_1 \end{cases} \leq \begin{cases} \theta_1 \leq 1 \\ \theta_1 \leq 5 - \theta'_2 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq \theta'_2 \leq 5$$

# Exercice : Calcul du graphe

## Le réseau



## Graphe des classes



- 1 Les réseaux de Petri T-temporels
  - Présentation informelle
  - Définition et sémantique
- 2 Graphe des classes d'états
  - Intuition
  - Calcul du successeur
  - Convergence et terminaison
- 3 Exercice, calcul du successeur
  - Tir de  $t_3$
  - Calcul du graphe complet
- 4 Utilisation de l'outil ROMÉO

## Utilisation de l'outil ROMÉO

**Control panel**

Petri net type:

- Untimed (PN)
- Time (T-TPN)
- Stopwatch-T-TPN -> timed inhibitor arcs
- Hybrid-T-TPN

Parameters:

- No
- Real parameters
- Integer-preserving underapproximation
- Integer parameters

Cost PN:

- No
- Cost (Polyhedron)
- Cost (Split)

Control PN:

- No
- Untimed control PN
- Timed control PN (zone)
- Timed control PN (class)

Hide Guards, Updates, label and Identifier

- guard  update
- Place label  Place identifier
- Transition label  Transition identifier
- P/T Identifier <- P/T label

**TPN simulator**

Zone-based method  
 State-class method

Reset simulation Step back Step Forward

simulate the sequenc

Color semantics (can be changed in preferences window):  
-Enabled transitions -> brown  
-Firable transitions -> green  
Click on the transition to fire

Initial class:  
P3=1 P2=1 P1=1  
(Other variables are hidden or are equal to zero)

T1 in [3, 5]  
T2 in [7, 9]  
T4 in [4, 6]

Enabled transitions : T1, T2, T4  
Firable transitions : T1, T4

Show all the state variables? Quit Simulator

graph [passed=incl] in : trainIsanscontrol.txt  
~/vier/Documents/IRCCyN/romeo/examples/aaTrucEncours/Train2024/SED2025/trainIsanscontrol.xml ...  
~/vier/Documents/IRCCyN/romeo/examples/aaTrucEncours/Train2024/SED2025/ExDuCours.xml ...done  
-opening ~/Users/olivier/Documents/IRCCyN/romeo/examples/aaTrucEncours/Train2024/SED2025/gallon.xml ...done  
-Opening "Simulator" window ... Starting simulator (working cts file: /Users/olivier.romeo/temp/ctsfile.cts)  
-Invoking romeo-ctl : simulate

Merci de votre attention

## Références bibliographiques

# Références bibliographiques I



Alur, R., Courcoubetis, C., and Dill, D. (1990).

Model-checking for real-time systems.

In *5th IEEE Symposium on Logic in Computer*, pages 414–425. IEEE Computer Society Press.



Berthomieu, B. and Diaz, M. (1991).

Modeling and verification of time dependent systems using time Petri nets.

*IEEE transactions on software engineering*, 17(3) :259–273.



Berthomieu, B. and Menasche, M. (1983).

An enumerative approach for analyzing time Petri nets.

In *IFIP Congress Series*, volume 9, pages 41–46. Elsevier Science Publ. Comp. (North Holland).



Berthomieu, B., Ribet, P.-O., and Vernadat, F. (2004).

The tool tina – construction of abstract state spaces for petri nets and time petri nets.

*International Journal of Production Research*, 42 :2741–2756.



Berthomieu, B. and Vernadat, F. (2003).

State class constructions for branching analysis of time Petri nets.

In *TACAS'03*, pages 442–457. Springer-Verlag.

# Références bibliographiques II



Bucci, G., Carnevali, L., Ridi, L., and Vicario, E. (2010).  
Oris : a tool for modeling, verification and evaluation of real-time systems.  
*Softw. Tools for Techn. Transfer*, 12(5) :391–403.



Henzinger, T., Nicollin, X., Sifakis, J., and Yovine, S. (1992).  
Symbolic model checking for real-time systems.  
In [1992] *Proceedings of the Seventh Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 394–406.



Lime, D., Roux, O. H., Seidner, C., and Traonouez, L.-M. (2009).  
ROMÉO : A parametric model-checker for Petri nets with stopwatches.  
In *15th Int. Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS 2009)*, volume 5505 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 54–57, York, United Kingdom. Springer.



Merlin, P. (1974).  
*A study of the recoverability of computing systems*.  
PhD thesis, Department of Information and Computer Science, University of California, Irvine, CA.

## Remerciements et crédits

**Auteur.rice.s** : Olivier H. Roux

**Intervenant.e.s** : Olivier H. Roux

Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la **Licence Creative Commons Attribution 4.0 International**.

Pour voir une copie de cette licence, visitez

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr>.