Évaluation de performances des SED grâce à (max,+)

Formation sur les Systèmes à Événements Discrets (SED)

2e édition
Mars 2025
Nantes

Société d'Automatique,
de Génie Industriel & de Productique

Plan

1. Introduction
   - Comment modéliser nos phénomènes d'intérêt ?
   - Modèles à base de dateurs et de compteurs d'événements
2. Dioïdes et leurs propriétés algébriques
   - Algèbre « max-plus »
   - Matrices « max-plus »
   - Boîtes à outils
3. Théorie spectrale des matrices « max-plus »
   - Théorie spectrale *dans* $\overline{\mathbb{R}}_{max}$
   - Application aux graphes
4. Dynamiques des systèmes
   - Résolution d'équations
   - Systèmes dynamiques : valeurs et vecteurs propres
5. Conclusion et éléments bibliographiques
6. Remerciements et crédits

Plan

Introduction

Motivation

SED temporisés et la synchronisation

On s'intéresse à une classe de SED temporisés sur laquelle l'occurrence d'un événement est conditionnée par l'occurrence d'autres événements.

Exemple : départ conditionné pour voyage organisé

Motivation

Problématique

Les dates d'arrivée du TGV et du TER sont notées x_1^{arr} et x_2^{arr}, respectivement. On stipule que la date de départ du bus, notée x_3^{dep}, est conditionnée par x_1^{arr} et x_2^{arr}. *Mais comment modéliser cela ?*

Motivation

Problématique

Les dates d'arrivée du TGV et du TER sont notées x_1^{arr} et x_2^{arr}, respectivement. On stipule que la date de départ du bus, notée x_3^{dep}, est conditionnée par x_1^{arr} et x_2^{arr}. *Mais comment modéliser cela ?*

Mise en équation

En considérant des voyages sans aléa, x_1^{arr} et x_2^{arr} peuvent être calculées en fonction des dates de départ notées x_1^{dep} et x_2^{dep} respectivement :

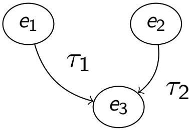
$$x_1^{arr} = x_1^{dep} + \tau_1 \text{ et } x_2^{arr} = x_2^{dep} + \tau_2$$

Concernant la date de départ x_3^{dep}, le contexte nous donne :

$$\begin{aligned} x_3^{dep} \geq x_1^{arr} \wedge x_3^{dep} \geq x_2^{arr} &\iff \boxed{x_3^{dep} \geq \max(x_1^{arr}, x_2^{arr})} \\ &\iff x_3^{dep} \geq \max(x_1^{dep} + \tau_1, x_2^{dep} + \tau_2) \end{aligned}$$

Motivation

Considérons les événements e_1, e_2 et e_3 pour représenter les « activation » de chaque véhicule (TGV / TER / bus).



Définition d'un *dateur*

$x_i(k)$ représente la date de la k^{e} occurrence de l'événement e_i.

Représentation *dateurs*

$$x_3^{dep} \geq \max(x_1^{dep} + \tau_1, x_2^{dep} + \tau_2)$$

$$x_3(k) \geq \max\Big(x_1(k) + \tau_1, x_2(k) + \tau_2\Big)$$

Motivation

De l'inéquation à l'équation

En considérant une sémantique d'exécution « au plus tôt » [a] :

$$x_3(k) \geq \max\Big(x_1(k) + \tau_1, x_2(k) + \tau_2\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3(k) = \max\Big(x_1(k) + \tau_1, x_2(k) + \tau_2\Big)}$$

a. Ou *ASAP* pour « *as soon as possible* ».

Dateurs et compteurs d'événements

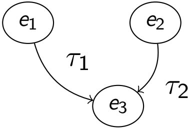
Sémantiques

- $x_i(k)$ représente la k^{e} occurrence de l'événement e_i ;
- $\eta_i(t)$ représente le nombre d'occurrences de l'événement e_i jusqu'à la date t ;

Dualité

$\eta_i(t)$ est le plus grand k tel que x_i ait eu lieu avant ou à l'instant t.

Dateurs et compteurs d'événements

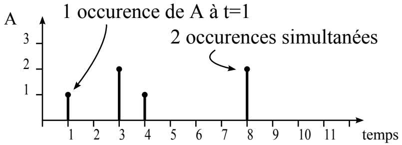


Représentation *compteurs*

$$\eta_3(t) = \min\Big(\eta_1(t-\tau_1), \eta_2(t-\tau_2)\Big)$$

Dateurs et compteurs d'événements

Représentation possible des occurrences des événements dans le temps sous la forme de paires (événement, date).



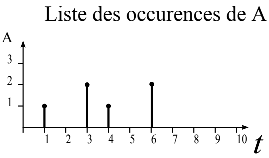
Événements A successifs : $(A, 1), (A, 3), (A, 3), (A, 4), (A, 8), (A, 8), \ldots$

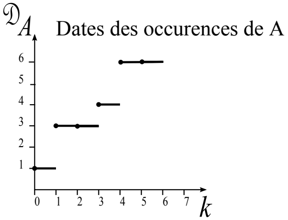
Application

Au sein des simulateurs, on peut utiliser cette représentation : cette liste est alors appelée un échéancier.

Dateurs et compteurs d'événements

Dateurs : date de déclenchement des événements.





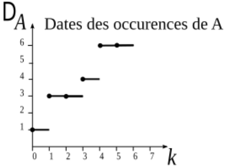
Attention aux conventions :

- les dimensions des axes ;
- le premier événement est numéroté $k = 0$.

Dateurs et compteurs d'événements

Fonction dateur associée à l'événement A :

$$\mathcal{D}_A(k) : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ k \mapsto \text{date de l'occurrence n° } k \text{ de } A \end{cases}$$



Exemple : $\mathcal{D}_A(0) = 1, \mathcal{D}_A(1) = 3, \mathcal{D}_A(2) = 3, \mathcal{D}_A(3) = 4, \ldots$

Les fonctions dateurs sont monotones croissantes :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{D}_A(k+1) \geq \mathcal{D}_A(k)$$

Et maintenant ?

Constat

Les opérations max et $+$ sont centrales pour nos SED présentant des synchronisations.

Mais ...

- les équations précédentes ne sont pas linéaires ;
- le max n'est pas inversible.

Et maintenant ?

Constat

Les opérations max et $+$ sont centrales pour nos SED présentant des synchronisations.

Mais ...

- les équations précédentes ne sont pas linéaires ;
- le max n'est pas inversible.

Et si on changeait de point de vue ?

Et maintenant ?

Constat

Les opérations max et $+$ sont centrales pour nos SED présentant des synchronisations.

Mais ...

- les équations précédentes ne sont pas linéaires ;
- le max n'est pas inversible.

Et si on changeait de point de vue ?

OK ; mais pour se positionner où ?

$$(\mathbb{Z}, +, \times) \text{ ou } (\mathbb{R}, +, \times) \Rightarrow ???$$

Plan

Algèbre « max-plus », ou $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

L'algèbre « max-plus » désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\qquad \max(10, 2) = 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle $+$ notée $\otimes$ $\qquad 10 + 2 = 10 \otimes 2 = 12$

Algèbre « max-plus », ou $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

L'algèbre « max-plus » désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\quad \max(10, 2) = 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle $+$ notée $\otimes$ $\quad 10 + 2 = 10 \otimes 2 = 12$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes) = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ est un demi-anneau.

Algèbre « max-plus », ou $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

L'algèbre « max-plus » désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\qquad \max(10, 2) = 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle $+$ notée $\otimes$ $\qquad 10 + 2 = 10 \otimes 2 = 12$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes) = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ est un demi-anneau. $\forall a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}_{max}$:

- $\oplus$ *associative*, *commutative* et $\varepsilon = -\infty$ pour zéro $\qquad a \oplus \varepsilon = a$
- $\otimes$ *associative* et $e = 0$ pour élément unité $\qquad a \otimes e = a$
- $\otimes$ *distribue* sur $\oplus$ $\qquad a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- ε *absorbant* pour $\otimes$ $\qquad a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

Algèbre « max-plus », ou $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

L'algèbre « max-plus » désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\quad \max(10, 2) = 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle $+$ notée $\otimes$ $\quad 10 + 2 = 10 \otimes 2 = 12$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes) = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ est un demi-anneau. $\forall a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}_{max}$:

- $\oplus$ *associative*, *commutative* et $\varepsilon = -\infty$ pour zéro $\quad a \oplus \varepsilon = a$
- $\otimes$ *associative* et $e = 0$ pour élément unité $\quad a \otimes e = a$
- $\otimes$ *distribue* sur $\oplus$ $\quad a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- ε *absorbant* pour $\otimes$ $\quad a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

Par ailleurs :

- $\oplus$ est idempotent $\quad a \oplus a = a$

Un *demi-anneau idempotent* aussi appelé un dioïde.

Algèbre « max-plus », ou $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

L'algèbre « max-plus » désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\qquad \max(10, 2) = 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle $+$ notée $\otimes$ $\qquad 10 + 2 = 10 \otimes 2 = 12$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes) = \overline{\mathbb{R}}_{max}$ est un demi-anneau. $\forall a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}_{max}$:

- $\oplus$ *associative*, *commutative* et $\varepsilon = -\infty$ pour zéro $\qquad a \oplus \varepsilon = a$
- $\otimes$ *associative* et $e = 0$ pour élément unité $\qquad a \otimes e = a$
- $\otimes$ *distribue* sur $\oplus$ $\qquad a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- ε *absorbant* pour $\otimes$ $\qquad a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

Par ailleurs :

- $\oplus$ est idempotent $\qquad a \oplus a = a$

$\boxed{\text{Un \textit{demi-anneau idempotent} aussi appelé un dioïde.}}$

« Max-plus » indépendamment des scalaires considérés : $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ (ou *autre*).

Algèbre « max-plus », exemples de calculs

Quiz

- $e \oplus 3 \stackrel{?}{=}$
- $e(\varepsilon \oplus 10) = e \otimes (\varepsilon \oplus 10) \stackrel{?}{=}$
- $4^3 \stackrel{?}{=}$
- $\sqrt{3} \stackrel{?}{=}$

Algèbre « max-plus », exemples de calculs

Quiz

- $e \oplus 3 \overset{?}{=} \max(0,3) = 3$
- $e(\varepsilon \oplus 10) = e \otimes (\varepsilon \oplus 10) \overset{?}{=} 0 + \left(max(-\infty, 10)\right) = 10$
- $4^3 \overset{?}{=} \underbrace{4 \otimes \ldots \otimes 4}_{3 \text{ facteurs}} = 4 + 4 + 4 = 12$
- $\sqrt{3} \overset{?}{=} 3^{1\cancel{/}2} = \underbrace{3}_{1/2 \text{ facteurs}} = 3/2 = 1,5$

Algèbre « max-plus », conséquences de l'idempotence

L'idempotence de $\oplus$ exclut son inversion :

$$a, b \in \mathbb{R}_{\max}, \quad a \oplus b = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \oplus a}_{} \oplus b = \underbrace{a \oplus \varepsilon}_{} \qquad (a \oplus \text{ des 2 côtés})$$

$$\Leftrightarrow a \oplus b = a \quad \boxed{\neq \varepsilon} \qquad (\textit{sauf} \text{ si } a = b = \varepsilon)$$

Algèbre « max-plus », conséquences de l'idempotence

L'idempotence de $\oplus$ exclut son inversion :

$$
\begin{aligned}
a, b \in \mathbb{R}_{\max}, \quad & a \oplus b = \varepsilon \\
& \Rightarrow \underbrace{a \oplus a} \oplus b = \underbrace{a \oplus \varepsilon} && (a \oplus \text{ des 2 côtés}) \\
& \Leftrightarrow a \oplus b = a \quad \boxed{\neq \varepsilon} && (\textit{sauf} \text{ si } a = b = \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Mais permet de définir la relation d'ordre $\preceq$ par

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = b.$$

Algèbre « max-plus », conséquences de l'idempotence

L'idempotence de $\oplus$ exclut son inversion :

$$
\begin{aligned}
a, b \in \mathbb{R}_{\max}, \quad & a \oplus b = \varepsilon \\
& \Rightarrow \underbrace{a \oplus a} \quad \oplus b = \underbrace{a \oplus \varepsilon} & & (a \oplus \ \text{des 2 côtés}) \\
& \Leftrightarrow a \qquad \oplus b = a \qquad \boxed{\neq \varepsilon} & & (\textit{sauf} \text{ si } a = b = \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Mais permet de définir la relation d'ordre $\preceq$ par

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = b.$$

Dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$, $\otimes$ est bien inversible pour $a \neq \varepsilon$: $a \otimes -a = e$.
Mais pas nécessairement vrai dans tous les dioïdes.

Algèbre « max-plus », passage aux matrices

Opérations matricielles définies de façon conventionnelle :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{\color{red}{n}} A_{ik} \otimes B_{kj} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

avec n le nombre de colonnes de A et de lignes de B.

Algèbre « max-plus », passage aux matrices

Opérations matricielles définies de façon conventionnelle :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec n le nombre de colonnes de A et de lignes de B.

Algèbre « max-plus », passage aux matrices

Opérations matricielles définies de façon conventionnelle :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec n le nombre de colonnes de A et de lignes de B.

Pour A carrée de taille $n \times n$,

$$A^k = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ termes}}, \text{ avec } A^0 = \begin{pmatrix} e & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & e \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_n.$$

The “Maxplus toolbox”

Boîte à outils pour les activités pratiques

- Un grand nombre d'algorithmes utiles pour les matrices « max-plus » : `www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/MaxplusToolbox.html`
- Intégrée à Scicoslab (*fork* de Scilab 4) : `www.scicoslab.org`
- Contributeurs : Michael McGettrick, Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Jean-Pierre Quadrat and Jean-Philippe Chancelier.

The “Maxplus toolbox”

Boîte à outils pour les activités pratiques

- Un grand nombre d'algorithmes utiles pour les matrices « max-plus » : `www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/MaxplusToolbox.html`
- Intégrée à Scicoslab (*fork* de Scilab 4) : `www.scicoslab.org`
- Contributeurs : Michael McGettrick, Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Jean-Pierre Quadrat and Jean-Philippe Chancelier.

Work in progress

- Bientôt, algorithmes intégrés à PyMinMaxGD [Boutin et al., 2024].
- Bibliothèque Python, basée sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, « incluant » $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$.
- `gitlab.univ-nantes.fr/dioids/python-toolbox`
- Contributeurs : Olivier Boutin et Claude Martinez (*basé sur le travail de Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau et Mehdi Lhommeau*).

Une matrice est déclarée comme sous Scilab : le préfixe # permet de lui donner le type max-plus.

```
-->A=#([%0 5 3 ; 4 3 4 ; 6 5 4])
 A  =


!.  5  3  !
!         !
!4  3  4  !
!         !
!6  5  4  !
```

%0 désigne $\varepsilon = -\infty$
%1 désigne $e = 0$
%top désigne $+\infty$

Les fonctions `%zeros()` et `%eye()` permettent de déclarer des matrices (max-plus) nulle et identité :

```
-->B=full(%zeros(3,3))
 B  =


!.  .  .  !
!         !
!.  .  .  !
!         !
!.  .  .  !
-->C=%eye(3,3)
 C  =


!0  .  .  !
!         !
!.  0  .  !
!         !
!.  .  0  !
```

`full()` permet de rendre pleine une matrice creuse

Les opérations entre matrices « max-plus » sont surchargées.

```
-->A+C
 ans   =
 
!0   5   3   !
!            !
!4   3   4   !
!            !
!6   5   4   !
```

```
-->A*B
 ans   =
 
!.   .   .   !
!            !
!.   .   .   !
!            !
!.   .   .   !
```

```
-->A*A
 ans   =
 
!9    8    9   !
!              !
!10   9    8   !
!              !
!10   11   9   !
```

```
-->A^2
 ans   =
 
!9    8    9   !
!              !
!10   9    8   !
!              !
!10   11   9   !
```

Plan

Théorie spectrale *dans* $\overline{\mathbb{R}}_{max}$

Intérêt

- Être capable d'exprimer des objets en des sommes d'objets plus simples.
- Aide à caractériser l'espace représentant un système complexe, à l'aide d'éléments générateurs.
- La valeur propre renseigne de manière agrégée sur les propriétés intrinsèques du système complexe global ($\Rightarrow$ cadence).

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ donc le problème spectral $A \otimes x = \lambda \otimes x$ est le suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et en détails :

$$\begin{cases} \max(1 + x_1, 3 + x_2) = \lambda + x_1, & \overbrace{\lambda + x_1 \geq 1 + x_1}^{\lambda \geq 1} \wedge \lambda + x_1 \geq 3 + x_2 \\ \max(5 + x_1, 2 + x_2) = \lambda + x_2, & \lambda + x_2 \geq 5 + x_1 \wedge \overbrace{\lambda + x_2 \geq 2 + x_2}^{\lambda \geq 2} \end{cases}.$$

Avec les notations de $\overline{\mathbb{R}}_{max}$, $\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_1, & (\lambda \geq 1) \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_2, & (\lambda \geq 2) \end{cases}$

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

$$\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_1, & (\lambda \geq 1) \quad (1) \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_2, & (\lambda \geq 2) \quad (2) \end{cases}$$

Il faut pouvoir satisfaire toutes les conditions. On prend donc $\lambda \geq 2$ (le plus grand λ) et nous revenons sur la 1re équation

$$\max(\cancel{1 + x_1}, 3 + x_2) = \lambda_{\geq 2} + x_1$$

qui nous donne $3 + x_2 = \lambda_{\geq 2} + x_1$, soit dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$: $3 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_1$. Cette équation peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} (-3) \otimes 3 \otimes x_2 &= (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 \Leftrightarrow \\ e \otimes x_2 &= (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 \Leftrightarrow \\ x_2 &= (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 \end{aligned}$$

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

$$\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_1, & (\lambda \geq 1) \quad (1) \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_2, & (\lambda \geq 2) \quad (2) \\ x_2 = (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 & \quad (3) \end{cases}$$

On remplace ensuite x_2 dans la 2e équation :

- à gauche : $5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 = 5 \otimes x_1 \oplus (-1) \otimes \lambda \otimes x_1$;
- à droite : $\lambda \otimes (-3) \otimes \lambda \otimes x_1$.

Finalement (les deux membres étant égaux) :

$$(5 \oplus (-1) \otimes \lambda) \otimes x_1 = (\lambda \otimes (-3) \otimes \lambda) \otimes x_1$$

On souhaite $x_1 \neq \varepsilon = -\infty$ donc on peut simplifier :

$$5 \oplus (-1) \otimes \lambda = \lambda \otimes (-3) \otimes \lambda = (-3) \otimes \overbrace{\lambda^2}^{\lambda+\lambda} .$$

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

$$\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_1, & (\lambda \geq 1) \quad (1) \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_2, & (\lambda \geq 2) \quad (2) \\ x_2 = (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 & \quad (3) \\ 5 \oplus (-1) \otimes \lambda = (-3) \otimes \lambda^2 & \quad (4) \end{cases}$$

Concentrons-nous sur la 4e équation : $\max(5, -1 + \lambda) = -3 + 2\lambda$.
Donc 2 situations sont possibles :

(a) $5 = -3 + 2\lambda \wedge -1 + \lambda \leq -3 + 2\lambda$

soit $\lambda = 4 \wedge \lambda \geq 2$ donc $\lambda = 4$

(b) $5 \leq -3 + 2\lambda \wedge -1 + \lambda = -3 + 2\lambda$

$\lambda \geq 4 \wedge \lambda = 2$ donc c'est impossible !

La solution est la situation (a) avec $\lambda = 4$.

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

$$\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_1, \quad (\lambda \geq 1) & (1) \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 = \lambda \otimes x_2, \quad (\lambda \geq 2) & (2) \\ x_2 = (-3) \otimes \lambda \otimes x_1 & (3) \\ 5 \oplus (-1) \otimes \lambda = (-3) \otimes \lambda^2 & (4) \end{cases}$$

La solution est $\lambda = 4$.

La famille de vecteurs propres peut-être calculée de la relation $x_2 = (-3) \otimes \lambda \otimes x_1$ qui est équivalente à $x_2 = 1 \otimes x_1$. On obtient comme espace propre l'ensemble de solutions suivant :

$$E_{\lambda=4} = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n_{\max} \mid x_2 = 1 + x_1\}.$$

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

$$E_{\lambda=4} = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n_{max} \mid x_2 = 1 + x_1\}$$

Vérifions le problème spectral initial : $A \otimes x = \lambda \otimes x$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \otimes x_1 \end{pmatrix} = 4 \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \otimes x_1 \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes 1 \otimes x_1 = 4 \otimes x_1 \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes 1 \otimes x_1 = 4 \otimes 1 \otimes x_1 \end{cases}$

Théorie spectrale des matrices « max-plus »

Exemple

$$E_{\lambda=4} = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n_{max} \mid x_2 = 1 + x_1\}$$

Vérifions le problème spectral initial : $A \otimes x = \lambda \otimes x$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \otimes x_1 \end{pmatrix} = 4 \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \otimes x_1 \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{cases} 1 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes 1 \otimes x_1 = 4 \otimes x_1 \\ 5 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes 1 \otimes x_1 = 4 \otimes 1 \otimes x_1 \end{cases}$

C'est-à-dire

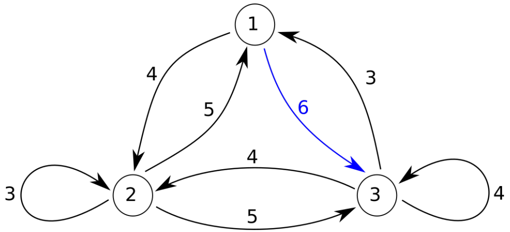
$$\begin{pmatrix} 4 \otimes x_1 \\ 5 \otimes x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \otimes x_1 \\ 5 \otimes x_1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\checkmark}$$

Matrices, graphes et théorie spectrale

$A \in \overline{\mathbb{R}}_{max}^{n \times n}$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{G}(A)$: graphe orienté et pondéré avec n sommets et une arête (j, i) [a] de poids A_{ij} si $A_{ij} \neq \varepsilon$.



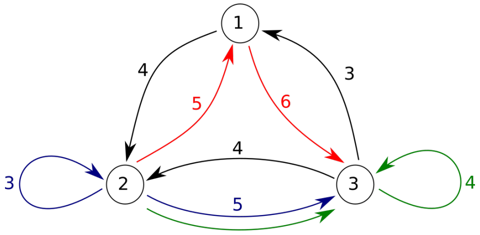
a. i pour les *lignes* et j pour les *colonnes* : on reprend le sens conventionnel de [Baccelli et al., 1992].

Matrices, graphes et théorie spectrale

Coefficients des puissances de A interprétés en termes de chemins optimaux dans $\mathcal{G}(A)$

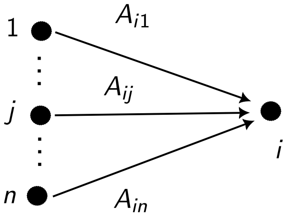
A^k_{ij} poids maximaux des chemins de longueur k partant de j et terminant en i.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & 8 \\ 10 & \color{red}{11} & 9 \end{pmatrix}$$



Matrices, graphes et théorie spectrale

Soit $\mathcal{G}(A)$:

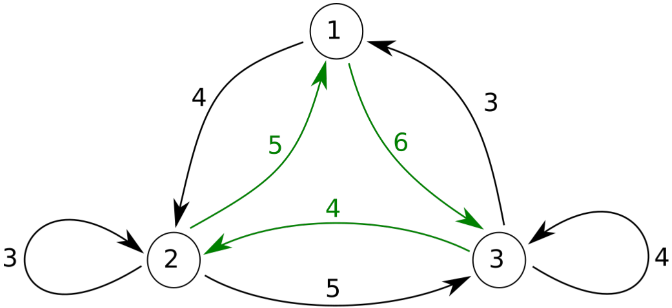


Depuis le sommet j vers le sommet i il existe un arc (j, i) de poids A_{ij}.

Calcul de la valeur propre λ de $\mathcal{G}(A)$:

- Chemins élémentaires : on ne passe qu'une seule fois par un même sommet ;
- Poids moyen des chemins élémentaires (poids divisé par la longueur du chemin) ;
- La valeur propre est égale au maximum des poids moyens.

Matrices, graphes et théorie spectrale



- Poids moyens : $\{\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4+5}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{4+5+3}{3}, \frac{5+6+4}{3}\}$
- Valeur propre : $\max\{\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4+5}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{4+5+3}{3}, \frac{5+6+4}{3}\} = \frac{15}{3} = 5$

Matrices, graphes et théorie spectrale

Coefficients des puissances de A interprétés en termes de chemins optimaux dans $\mathcal{G}(A)$

A^k_{ij} poids maximaux des chemins de longueur k partant de j et terminant en i.

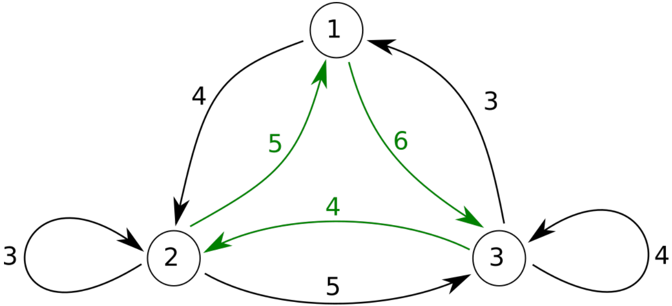
$Trace(A^k)$ $(= \bigoplus_{i=1}^{n} A^k_{ii})$ poids maximaux des circuits de longueur k.

Poids moyen maximal

$$\rho_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} Trace(A^k)^{1/k}$$

Poids moyen : poids divisé par la longueur.

Circuit critique [Cohen, 1995] : circuit de poids moyen égal à $\rho_{\max}(A)$.



$$\rho_{\max}(A) = \max\left(3, 4, \frac{9}{2}, \frac{12}{3}, \frac{15}{3}\right)$$

Un seul circuit critique (poids moyen : $\frac{5+6+4}{3} = \rho_{\max}$).

$$\rho_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} Trace(A^k)^{1/k}$$

```
-->naiveeigenv(#(1))
 ans  =
 1

-->naiveeigenv(%0)
 ans  =
 .

-->naiveeigenv(%top)
 ans  =
 Inf
```

```
->A=#([%0 5 3; 4 3 4; 6 5 4])
 A  =
!.  5  3  !
!         !
!4  3  4  !
!         !
!6  5  4  !

-->naiveeigenv(A)
 ans  =
 5
```

La fonction `naiveeigenv.sci` :

```
function rho=naiveeigenv(a)
n=size(a,1)
x=a
t=mptrace(a)
for i=2:n
x=x*a
t=t + (mptrace(x)).^(1/i)
end
rho=t
```

Matrices, graphes et théorie spectrale

- $\rho_{\mathsf{max}}(A)$ est une valeur propre de A : il existe un (ou plusieurs) vecteur(s) propre(s) associé(s) x tel que

$$A \otimes x = \rho_{\mathsf{max}}(A) \otimes x.$$

- Toute valeur propre de A est inférieure ou égale à $\rho_{\mathsf{max}}(A)$.

Matrices, graphes et théorie spectrale

$$A \otimes x = \lambda \otimes x$$

avec λ calculé précédemment.

En multipliant *à gauche* par $-\lambda$ et en prenant $M = (-\lambda) \otimes A$, on obtient

$$\Big((-\lambda) \otimes A \otimes x = \Big) M \otimes x = x \Big(= (-\lambda) \otimes \lambda \otimes x\Big)$$

On peut alors montrer que tous les vecteurs propres x sont générés par les colonnes de la matrice :

$$M_x = \bigoplus_{i=1}^{n} M^i = M \oplus M^2 \oplus \cdots \oplus M^n.$$

Les éléments de la diagonale de cette matrice sont égaux à e, où n est la dimension de A.

```
-->M=#(-lambda)*A
 M   =
!.    0    -2   !
!               !
!-1   -2   -1   !
!               !
!1    0    -1   !

-->Mx=M+(M^2)+(M^3)
 Mx   =
!0   0   -1   !
!             !
!0   0   -1   !
!             !
!1   1   0    !
```

```
-->v1=Mx(:,1)
 v1   =
!0   !
!    !
!0   !
!    !
!1   !

-->v2=Mx(:,2)
 v2   =
!0   !
!    !
!0   !
!    !
!1   !
```

```
-->v3=Mx(:,3)
 v3  =
!-1  !
!    !
!-1  !
!    !
!0   !

-->v1==v2
 ans  =
  T
  T
  T

-->v3==#(-1)*v1
 ans  =
  T
  T
  T
```

```
-->A*v1==lambda*v1
 ans  =
  T
  T
  T

-->A*v2==lambda*v2
 ans  =
  T
  T
  T

-->A*v3==lambda*v3
 ans  =
  T
  T
  T
```

Donc $a \otimes v_1$ pour tout a est un vecteur propre associé à λ.

```
-->A*#(10)*v1==lambda*#(10)*v1
 ans  =
  T
  T
  T

-->A*#(-10)*v1==lambda*#(-10)*v1
 ans  =
  T
  T
  T
```

A irréductible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}(A)$ fortement connexe $\Leftrightarrow$ $\forall(i,j), \exists m$ tel que $A^m_{ij} \neq \varepsilon$

- $\rho_{\max}(A)$ est l'unique valeur propre de A, notée souvent λ.
- Il peut exister plusieurs vecteurs propres associés à λ (ce qui forme l'espace propre E_λ).
- Comportement asymptotique cyclique :

$$\exists K \text{ tel que } k \geq K \Rightarrow A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k$$

où c, appelée cyclicité, se déduit de la longueur des circuits critiques.

Algorithmes de Karp et de Howard implémentés (fonctions `karp()` et `howard()`) pour notamment évaluer les poids moyens des circuits et identifier des vecteurs propres.
Fonction `eigenspace()` automatise la recherche et renvoie :

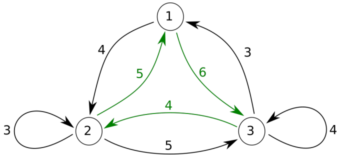
- une famille génératrice pour les vecteurs propres,
- le poids moyen maximal.

```
-->[v,rho]=eigenspace(A)
 rho  =
 5
 v  =
!0  !
!   !
!0  !
!   !
!1  !
```

```
// Test de consistance:
-->A*v==rho*v
 ans  =
  T
  T
  T
```

A irréductible : `rho` seule valeur propre ; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ... vecteurs propres

$$\rho_{\max}(A) = \lambda = 5$$



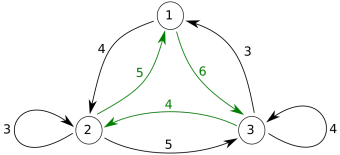
Un seul circuit critique : c est égal à sa longueur, i.e. $c = 3$, et

$$\exists K \text{ tel que } k \geq K \Rightarrow A^{k+3} = 5^3 \otimes A^k = 15 \otimes A^k$$

Il n'existe pas d'algorithmes efficaces pour déterminer K qui peut être arbitrairement grand. On peut le rechercher par des essais :

```
-->15*A^1==A^4
 ans  =
  F T T
  T F T
  T T T
```

$$\rho_{\max}(A) = \lambda = 5$$



Un seul circuit critique : *c* est égal à sa longueur, i.e. $c = 3$, et

$$\exists K \text{ tel que } k \geq K \Rightarrow A^{k+3} = 5^3 \otimes A^k = 15 \otimes A^k$$

Il n'existe pas d'algorithmes efficaces pour déterminer K qui peut être arbitrairement grand. On peut le rechercher par des essais :

```
-->15*A^1==A^4
 ans  =
  F T T
  T F T
  T T T

-->15*A^2==A^5
 ans  =
  T F T
  T T T
  T T T

-->15*A^3==A^6
 ans  =
  T T T
  T T T
  T T T

-->15*A^4==A^7
 ans  =
  T T T
  T T T
  T T T
```

Plan

Résolution d'équations

Soit $x = A \otimes x \oplus b$. Par récursion on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
x &= A \otimes (A \otimes x \oplus b) \oplus b = A^2 \otimes x \oplus A \otimes b \oplus b \\
&= A \otimes (A^2 \otimes x \oplus A \otimes b \oplus b) \oplus b = A^3 \otimes x \oplus A^2 \otimes b \oplus A \otimes b \oplus b \\
&\vdots \\
x &= A^m \otimes x \oplus A^{m-1} \otimes b \oplus \cdots \oplus A \otimes b \oplus b, \ (m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \\
&= A^m \otimes x \oplus (A^{m-1} \oplus \cdots \oplus A \oplus \mathrm{Id}) \otimes b, \ (\text{Id la matrice identité}) \\
x &= A^\infty \otimes x \oplus A^* \otimes b, \ (m \to \infty)
\end{aligned}
$$

avec $A^* = \mathrm{Id} \oplus \underbrace{A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^{m-1} \oplus \cdots}_{A^+}$ l'étoile de Kleene de A.

Résolution d'équations

La plus petite solution de $x = A \otimes x \oplus b$

La plus petite solution de $x = A \otimes x \oplus b$ est $\boxed{x_{min} = A^* \otimes b}$.

Éléments de preuve

On sait que $x = A^\infty \otimes x \oplus A^* \otimes b,\ (m \to \infty)$ donc toute solution x respecte $x \succeq x_{min} = A^* \otimes b$. Il faut montrer que x_{min} est une solution :

$$A \otimes x_{min} \oplus b = A \otimes (A^* \otimes b) \oplus b = A \otimes A^* \otimes b \oplus b = (A \otimes A^* \oplus I) \otimes b$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} A \otimes A^* &= A \otimes (I \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^{m-1} \oplus \cdots) \\ &= A^+ = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots \oplus A^{m-1} \oplus \cdots \end{aligned}$$

donc $A \otimes A^* \oplus I = A^+ \oplus I = A^*$ et

$$A \otimes x_{min} \oplus b = A^* \otimes b = x_{min}$$

Résolution d'équations

La plus petite solution de $x = A \otimes x \oplus b$

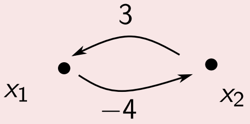
La plus petite solution de $x = A \otimes x \oplus b$ est $\boxed{x_{min} = A^* \otimes b}$.

- Valable dans n'importe quel demi-anneau idempotent (solution bien connue notamment dans les *demi-anneaux de langages*).
- Si tous les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à e, ou si $\mathcal{G}(A)$ ne comporte pas de circuit de poids positif, alors A^* est finie.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ -4 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et $b = (6,7)^T$.

$\mathcal{G}(A)$:



$$A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ -4 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ -4 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix} = (-1) \otimes \mathrm{Id}$$

$$A^4 = A^2 \otimes A^2 = (-1) \otimes \mathrm{Id} \otimes (-1) \otimes \mathrm{Id} = (-1)^2 \otimes \mathrm{Id}$$

$$A^{2n} = (-1)^n \otimes \mathrm{Id} = (-n) \otimes \mathrm{Id} \Rightarrow \left(A^{2n}\right)_{ij} \to \varepsilon \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Résolution d'équations

Exemple

$$A^{2n} \preceq A^{2(n-1)}$$

$$A^{2n+1} = A^{2n} \otimes A = (-n) \otimes I \otimes A = (-n) \otimes A \preceq A$$

donc $A^* = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^{m-1} = I \oplus A \oplus A^2$ et

$$A^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ -4 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 3 \\ -4 & e \end{pmatrix}.$$

Et la solution unique est donnée par
$x_{sol} = A^* \otimes b = \begin{pmatrix} e & 3 \\ -4 & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$. On peut aussi vérifier que
$x_{sol} = A \otimes x_{sol} \oplus b = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ -4 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exemple :

```
-->A=#([%0 3; -4 %0])
 A  =
!.   3  !
!       !
!-4  .  !

-->b=#([6; 7])
 b  =
!6  !
!   !
!7  !
```

```
-->Astar=star(A)
 Astar  =
!0   3  !
!       !
!-4  0  !

-->xmin=Astar*b
 xmin  =
!10 !
!   !
!7  !

-->A*xmin+b==xmin
 ans  =
  T
  T
```

Résolution d'équations

Théorie de la résiduation

- Elle est utile pour traiter le problème d'optimisation consistant à trouver le plus grand x tel que l'inégalité $f(x) \preceq b$ soit satisfaite dans un contexte algébrique idempotent ($\Rightarrow$ possible dans les dioïdes).
- Ce problème d'optimisation apparaît, par exemple, dans une perspective de commande en juste-à-temps, lorsque l'on cherche à retarder au maximum la date d'entrée des matériaux dans un système de production tout en garantissant un délai contraignant pour une cadence désirée.
- *Si elle existe*, la solution optimale pour un tel problème est $f^{\#}(b)$.
- *Concrètement*, il s'agit d'une inverse de $f(x)$ approchée « au supérieur », selon la sémantique de $\preceq$, qui *dépend du dioïde considéré*.

Résolution d'équations

Soit $A \otimes x \preceq b$. Cet inégalité s'écrit également comme :

$$\max_{j=1}^{n}(A_{ij} + x_j) \leq b_i, \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n$$

donc

$$\begin{aligned}
&A_{11} + x_1 \leq b_1 \wedge A_{12} + x_2 \leq b_1 \wedge \cdots \wedge A_{1n} + x_n \leq b_1 \\
&\vdots \\
&A_{n1} + x_1 \leq b_n \wedge A_{n2} + x_2 \leq b_n \wedge \cdots \wedge A_{nn} + x_n \leq b_n
\end{aligned}$$

Résolution d'équations

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} & x_1 \leq b_1 - A_{11} \wedge x_2 \leq b_1 - A_{12} \wedge \cdots \wedge x_n \leq b_1 - A_{1n} \wedge \\ & \vdots \\ \wedge & x_1 \leq b_n - A_{n1} \wedge x_2 \leq b_n - A_{n2} \wedge \cdots \wedge x_n \leq b_n - A_{nn} \end{aligned}$$

et finalement

$x_2 \leq b_1 - A_{12} \wedge x_2 \leq b_2 - A_{22} \wedge \cdots x_2 \leq b_n - A_{n2} \Leftrightarrow x_2 \leq \min_{i=1}^{n}(b_i - A_{i2})$

$$x_j \leq x_{j_{\max}} = \min_{i=1}^{n}(b_i - A_{ij}), \qquad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n$$

Résolution d'équations

Solution de $A \otimes X \preceq B$

Soient A, B deux matrices de taille $n \times n$. La plus grande matrice X satisfaisant $A \otimes X \preceq B$ est

$$X = A \backslash\!\!\circ B \quad \text{et } (A \backslash\!\!\circ B)_{ij} = \min_{k=1}^{n} (A_{ki} \backslash\!\!\circ B_{kj}) = \min_{k=1}^{n} (B_{kj} - A_{ki})$$

« Algorithme » de calcul : $\boxed{A \backslash\!\!\circ B = -(A^T \otimes (-B))}$.

Solution de $X \otimes A \preceq B$

Soient A, B deux matrices de taille $n \times n$. La plus grande matrice X satisfaisant $X \otimes A \preceq B$ est

$$X = B /\!\!\circ A \quad \text{et } (B /\!\!\circ A)_{ij} = \min_{k=1}^{n} (B_{ik} /\!\!\circ A_{jk}) = \min_{k=1}^{n} (B_{ik} - A_{jk})$$

$X \otimes A \preceq B \iff A^T \otimes X^T \preceq B^T$ (car $a \otimes b = b \otimes a$) donc $\boxed{B /\!\!\circ A = (A^T \backslash\!\!\circ B^T)^T}$ (« algorithme » de calcul).

Exemple :

```
-->A=#([1 2; 3 4])
 A  =
!1  2  !
!      !
!3  4  !

-->B=#([6 1; 9 2])
 B  =
!6  1  !
!      !
!9  2  !

-->X=A\B
 X  =
!5  -1  !
!       !
!4  -2  !

-->A*X <= B
 ans  =
  T T
  T T
```

```
-->X=B/A
 X  =
!-1  -3  !
!        !
!0   -2  !

-->X*A <= B
 ans  =
  T T
  T T

-->A\B == -(A'*(-B))
 ans  =
  T T
  T T

-->B/A == (A'\B')'
 ans  =
  T T
  T T
```

Résolution d'équations

Solution de $A \otimes x = b$

L'équation $A \otimes x = b$ admet une solution si et seulement si $A \otimes (A \backslash\!\!\!\circ\, b) = b$. Dans ce cas, la solution maximale est donnée par $x_{\text{max}} = A \backslash\!\!\!\circ\, b$, qui est la plus grande de toutes les solutions, c'est-à-dire :

$$A \otimes x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x \preceq A \backslash\!\!\!\circ\, b.$$

```
-->A=#([1.7 2.1; 1.2 2.7])
 A  =
!1.7  2.1  !
!          !
!1.2  2.7  !

-->b=#([2.6; 3.2])
 b  =
!2.6  !
!     !
!3.2  !

-->xmax=A\b
 xmax  =
!0.9  !
!     !
!0.5  !

-->A*xmax==b
 ans  =
  T
  T
```

```
-->xprime=#([0.2; 0.5])
 xprime  =
!0.2  !
!     !
!0.5  !

-->A*xprime==b
 ans  =
  T
  T

-->x=#([0.8; 0.5])
 x  =
!0.8  !
!     !
!0.5  !

-->A*x==b
 ans  =
  T
  T
```

$\forall x \mid x' \preceq x \preceq x_{max},\ A \otimes x = b$

```
-->A=#([1.7 2.1; 1.2 2.7])
 A   =
!1.7  2.1   !
!           !
!1.2  2.7   !

-->b=#([2.1; 3.2])
 b   =
!2.1  !
!     !
!3.2  !

-->A*(A\b)==b
 ans   =
  T
  F
```

Ici, on obtient un `F`. Donc, dans ce cas, la solution n'existe pas !

Systèmes dynamiques : valeurs et vecteurs propres

Soit le système autonome de la forme $x(k) = A \otimes x(k-1)$ avec A irréductible et λ la valeur propre de A.
Si la condition initiale $x(0)$ est choisie comme un vecteur propre v associé à λ, c-à-d $v \in E_\lambda$, alors le système évoluera comme suit :

$$x(k) = \lambda^k \otimes v.$$

En effet :

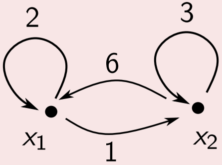
$$\begin{aligned}
&x(1) = A \otimes x(0) = A \otimes v = \lambda \otimes v \\
&x(2) = A \otimes x(1) = A \otimes (\lambda \otimes v) = \lambda \otimes (A \otimes v) = \lambda \otimes \lambda \otimes v = \lambda^2 \otimes v \\
&\vdots \\
&x(k) = \lambda^k \otimes v = \lambda^k \otimes x(0).
\end{aligned}$$

Ainsi, si v a des entrées non nulles, le système sera équilibré et synchronisé, avec $x(k) = \lambda \otimes x(k-1)$, c'-à-d que chaque événement e_i se produira λ unités de temps après le précédent.

Systèmes dynamiques : valeurs et vecteurs propres

Exemple

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{pmatrix}$$



- Poids moyens : $\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6+1}{2}\}$
- Valeur propre : $\max\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6+1}{2}\} = \frac{7}{2}$

$$x(k) = \lambda \otimes x(k-1) \Rightarrow x_i(k) - x_i(k-1) = \lambda$$

Cadence de production : 2 produits / 7 unités de temps

$$\lambda = \rho_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} Trace(A^k)^{1/k}$$

```
-->A=#([2 6; 1 3])
 A  =
!2  6  !
!      !
!1  3  !

-->naiveeigenv(A)
 ans  =
 3.5
```

```
-->A=#([2 6; 1 3])
 A  =
!2  6  !
!      !
!1  3  !

-->lambda=naiveeigenv(A)
 lambda  =
 3.5

-->M=#(-lambda)*A
 M  =
!-1.5  2.5   !
!            !
!-2.5  -0.5  !

-->M2=M^2
 M2  =
!0   2  !
!       !
!-3  0  !
```

```
-->Mv=M+M2
 Mv  =
!0     2.5  !
!           !
!-2.5  0    !

-->v1=Mv(:,1)
 v1  =
!0     !
!      !
!-2.5  !

-->v2=Mv(:,2)
 v2  =
!2.5  !
!     !
!0    !
```

```
-->A*v1==lambda*v1
 ans  =
  T
  T

-->A*v2==lambda*v2
 ans  =
  T
  T

-->A*v1==lambda*v1
 ans  =
  T
  T

-->A*v2==lambda*v2
 ans  =
  T
  T
```

```
-->v2==#(2.5)*v1
 ans  =
  T
  T
```

Donc $a \otimes v_1$ pour tout a est un vecteur propre associé à λ.

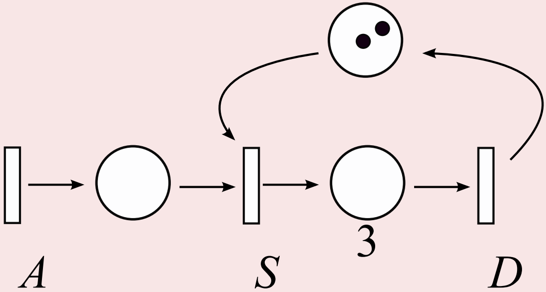
```
-->A*#(10)*v1==lambda*#(10)*v1
 ans  =
  T
  T

-->A*#(-10)*v1==lambda*#(-10)*v1
 ans  =
  T
  T

-->[v,rho]=eigenspace(A)
 rho  =
 3.5
 v  =
!0      !
!       !
!-2.5   !
```

Graphes d'Evénements Temporisés (GET)

Les GET constituent une sous-classe des Réseaux de Petri temporisés :



- Chaque place a exactement une transition en amont et en aval.
- Les places peuvent avoir un temps de séjour minimal non nul.

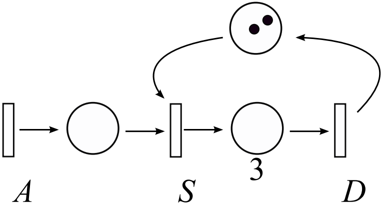
Dans cet exemple, un jeton doit séjourner au minimum 3 *unités de temps dans la place* $S \rightarrow D$.

Graphes d'Evénements Temporisés (GET)

- Transition d'entrée (ou source) : transition sans place d'entrée
- Transition de sortie (ou puits) : transition sans place de sortie

Fonctionnement au plus tôt (*ASAP*)

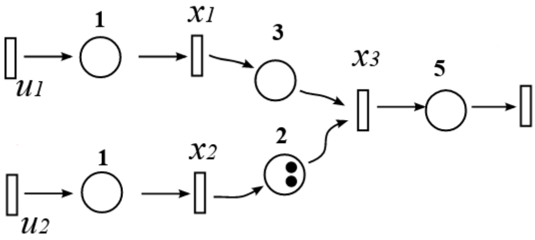
Toutes les transitions (excepté les entrées) sont franchies dès qu'elles sont franchissables.



C'est le mode de fonctionnement canonique dans la modélisation « max-plus ».

Exemple 1

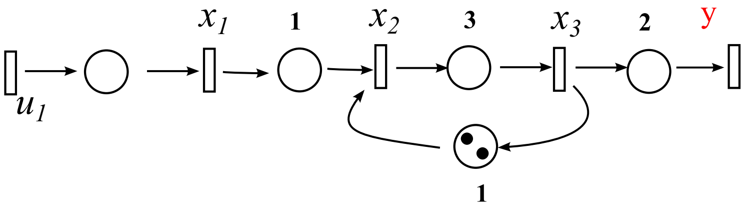
- Chaque place (cercle) a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie
- Un temps de séjour est associé aux places



- Les transitions internes (x_1, x_2, x_3) sont franchies *au plus tôt*.
  Le tir d'une transition consomme un jeton dans chaque place en entrée et produit un jeton dans chaque place en sortie.
- Les événements d'entrée (u_1, u_2).

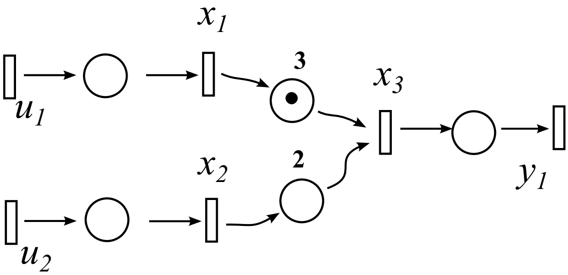
Exemple 2

Les circuits produisent des phénomènes cycliques.



Exemple : exécution au plus tôt pour un GET

Équations dateurs : dans l'algèbre « max-plus » :

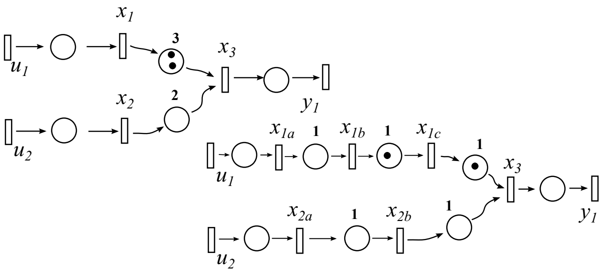


Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ *:* $\oplus = \max$, $\otimes = +$, $\varepsilon = -\infty$ *et* $e = 0$
$x_1(k < 0) = x_2(k < 0) = x_3(k < 0) = \varepsilon$,

$$\begin{array}{rcl} x_1(k) & = & u_1(k) \\ x_2(k) & = & u_2(k) \\ x_3(k) & = & 3 \otimes x_1(k-1) \oplus 2 \otimes x_2(k) \\ y_1(k) & = & x_3(k) \end{array}$$

Forme standard des modèles

Un comportement entrée-sortie équivalent, on peut augmenter le nombre de transitions internes pour que toute place ait un temps de séjour de au plus 1 unité (voire au plus un jeton).



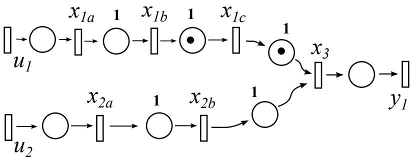
Remarque

Le marquage initial décrit l'état du système à $t = -\infty$. Ce marquage peut être différent à $t \neq -\infty$ (fonctionnement au plus tôt). Par exemple, le jeton dans $x_{1b} \to x_{1c}$ à $t = -\infty$ sera dans la place $x_{1c} \to x_3$ à $t \neq -\infty$. D'où l'équivalence.

Forme standard des modèles

Grâce à cette technique, tout GET peut se ramener sous la forme

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B u(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned}$$



$x(k) = A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad x(k) = M \otimes x(k) \oplus N$,

$M = A_0$ et $N = A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k)$ donc la plus petite solution de $x(k) = M \otimes x(k) \oplus N$ est $x(k) = M^* \otimes N$ donc

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \otimes (A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k)) \\ &= \underbrace{A}_{A_0^* \otimes A_1} \otimes x(k-1) \oplus \underbrace{\mathcal{B}}_{A_0^* \otimes B} \otimes u(k), \end{aligned}$$

Plan

Conclusion

- Nous avons vu l'intérêt pour nous de changer de point de vue et de modéliser nos équations dans un dioïde, certaines de ses propriétés algébriques, qui nous permettent d'appliquer la théorie spectrale dans les dioïdes et ce que cela nous permet pour analyser voire calculer des commandes pertinentes pour des systèmes complexes *sans avoir à effectuer aucune simulation*.
- C'est une partie des nombreux outils dont on dispose maintenant qui permettent une modélisation linéaire de systèmes présentant des phénomènes de synchronisation.
- Représentation formelle des systèmes et de leurs propriétés. (la plus exacte possible)

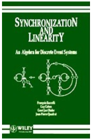
Références bibliographiques citées dans le cours

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., and Quadrat, J.-P. (1992).
Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems.
www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/BCOQ-book.pdf.

Boutin, O., Martinez, C., and Rakoto, N. (2024).
On Solving Controlled-Invariance Problems in Dioids Using the PyMinMaxGD Python Scripts Library.
In *ICINCO'24*, Porto, Portugal.

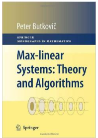
Cohen, G. (1995).
Théorie algébrique des systèmes à événements discrets.

Livres de référence pour aller plus loin



Synchronization and linearity : An Algebra for Discrete Event Systems, François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder and Jean-Pierre Quadrat, Wiley, 1992 Stock épuisé, téléchargeable depuis `https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/book-online.html`

Max Plus at Work : Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications, Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder and Jacob van der Woude, 2005, Princeton



Max-linear Systems : Theory and Algorithms, Peter Butkovic, 2010, Springer

Supports de cours pour aller plus loin

- Support du cours *Théorie algébrique des systèmes à événement discrets* de Guy Cohen :
  `https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/CoursSED.pdf`
- Support de cours *Algèbre max-plus et systèmes à événements discrets* de Stéphane Gaubert :
  `http://www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/deamines.html`
- Texte introductif *Modélisation à l'aide de systèmes (max,+) linéaires* de Jean Mairesse :
  `https://www-apr.lip6.fr/~mairesse/Article/modelDRET.ps.gz`
- Notes de cours du Prof. Carlos Andrey-Maia (UFMG-Brésil) :
  `https://www.researchgate.net/publication/385046930_Minicurso_Sistemas_a_Eventos_Discretos_Tropicais_dos_Modelos_Algebricos_as_Aplicacoes_em_Controle`
- Nombreux manuscrits de thèse sur le sujet.

Plan

Équipe pédagogique (dans l'ordre alphabétique des noms de famille)

Auteurs : Olivier Boutin et Guilherme Espindola-Winck.

Mentors : Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, Sébastien Lahaye, Mehdi Lhommeau, Jean Jacques Loiseau, Claude Martinez.

Intervenants : Olivier Boutin et Guilherme Espindola-Winck.

Crédits

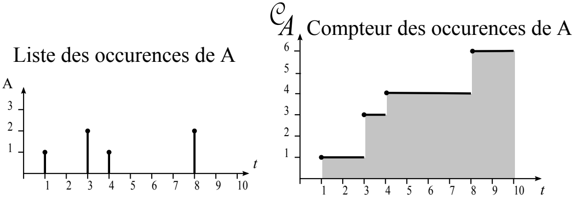
Figure page 5 : Mairie de Landerneau.

Plan

7. Bonus : pour aller plus loin
   - Représentations compteur
   - Théorie spectrale

Précisions sur les fonctions compteurs

Compteur : nombre cumulé d'occurrences.



Fonction compteur associée à l'événement A :

$$\mathcal{C}_A(t) : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ t \mapsto \text{nombre d'occurrences de } A \text{ jusqu'à } t \end{cases}$$

Exemple : $\mathcal{C}_A(0) = 0, \mathcal{C}_A(1) = 1, \mathcal{C}_A(2) = 1, \mathcal{C}_A(3) = 3, \ldots$

Les fonctions compteurs sont monotones croissantes :

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \mathcal{C}_A(t+1) \geq \mathcal{C}_A(t)$$

Démonstration de la dualité dateurs / compteurs

Dualité

Si $x_i(k)$ est décalé par τ_i on obtient $x_i(k) + \tau_i \leq t \Rightarrow x_i(k) \leq t - \tau_i$ ce qui nous amène à :

$$\eta_i(t - \tau_i) = \sup\{k | x_i(k) \leq t - \tau_i\} \iff \boxed{k \leq \eta_i(t - \tau_i)}$$

Si $\boxed{x_i(k) = \max_{j \in \mathcal{J}} (x_j(k) + \tau_j)}$ donc

$$\eta_i(t) = \sup\left\{k | \max_{j \in \mathcal{J}} (x_j(k) + \tau_j) \leq t\right\} = \sup\left\{k | \bigwedge_{j \in \mathcal{J}} x_j(k) \leq t - \tau_j\right\}$$

Finalement (règle ASAP)

$$\bigwedge_{j \in \mathcal{J}} k \leq \eta_j(t - \tau_j) \iff k \leq \min_{j \in \mathcal{J}} (\eta_j(t - \tau_j)) \text{ et } \boxed{\eta_i(t) = \min_{j \in \mathcal{J}} (\eta_j(t - \tau_j))}$$

Matrices, graphes et théorie spectrale

Si A est réductible : décomposition de A en classes irréductibles
$\Leftrightarrow$ décomposition de $\mathcal{G}(A)$ en composantes fortement connexes :

- spectre et espace propre plus complexes,
- une cyclicité asymptotique existe.