(max,+) et GET pour les SED

Formation Systèmes à Evénements Discrets

1ère édition
Janvier 2024

Société d'Automatique,
de Génie Industriel & de Productique

Plan

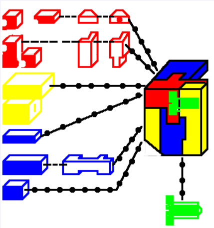
Plan

Introduction

Introduction

Modélisation, analyse et optimisation de SED pour lesquels l'évolution dans le **temps** est conditionnée par des **synchronisations**.

Assemblages dans les systèmes manufacturiers :



Assemblage possible quand les différentes pièces sont disponibles, i.e. à partir du maximum des dates de disponibilité

Modélisation, analyse et optimisation de SED pour lesquels l'évolution dans le **temps** est conditionnée par des **synchronisations**.

Correspondance dans un hub intermodal :

Départ d'un véhicule après avoir attendu les voyageurs en correspondance.

Plan

Concepts de base

Algèbre max-plus

L'algèbre max-plus désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\qquad 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle notée $\otimes$ $\qquad 10 \otimes 2 = 12$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes) = \mathbb{R}_{\max}$ est un **semi-anneau** $\qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$

- $\oplus$ associative, commutative et $\varepsilon = -\infty$ pour zéro $\qquad a \oplus \varepsilon = a$
- $\otimes$ associative et $e = 0$ pour élément unité $\qquad a \otimes e = a$
- $\otimes$ distribue sur $\oplus$ $\qquad a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- ε absorbant pour $\otimes$ $\qquad a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

idempotent. $\qquad a \oplus a = a$

Semi-anneau idempotent aussi appelé **dioïde**.

Algèbre max-plus

Quizz

- $e \oplus 3 \stackrel{?}{=}$
- $e(\varepsilon \oplus 10) = e \otimes (\varepsilon \oplus 10) \stackrel{?}{=}$
- $4^3 = 4^{\otimes 3} \stackrel{?}{=}$
- $\sqrt{3} = 3^{\otimes 1/2} \stackrel{?}{=}$

Algèbre max-plus

Quizz

- $e \oplus 3 \stackrel{?}{=} 3$
- $e(\varepsilon \oplus 10) = e \otimes (\varepsilon \oplus 10) \stackrel{?}{=} 10$
- $4^3 = 4^{\otimes 3} \stackrel{?}{=} 12$
- $\sqrt{3} = 3^{\otimes 1/2} \stackrel{?}{=} 1.5$

Algèbre max-plus

L'idempotence de $\oplus$ exclut son inversion :

$$
\begin{aligned}
a, b \in \mathbb{R}_{\max}, \quad & a \oplus b = \varepsilon \\
& \Rightarrow a \oplus a \oplus b = a \oplus \varepsilon \qquad \text{(en additionnant } a \text{ des 2 côtés)} \\
& \Leftrightarrow a \oplus b = a \qquad \text{contradiction ! (sauf si } a = b = \varepsilon\text{)}
\end{aligned}
$$

Mais permet de définir la relation d'ordre $\preceq$ par

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = b.$$

Pour $a \neq \varepsilon$, $a \otimes -a = 0 = e$, mais dans la plupart des autres semi-anneaux idempotents, la multiplication $\otimes$ n'est pas inversible.

Algèbre max-plus

Opérations matricielles définies de façon conventionnelle :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

avec n le nombre de colonnes de A et de lignes de B.

Pour A carrée,

$$A^k = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ fois}} \text{ avec } A^0 = \begin{pmatrix} e & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & e \end{pmatrix}.$$

Algèbre max-plus

Opérations matricielles définies de façon conventionnelle :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec n le nombre de colonnes de A et de lignes de B.

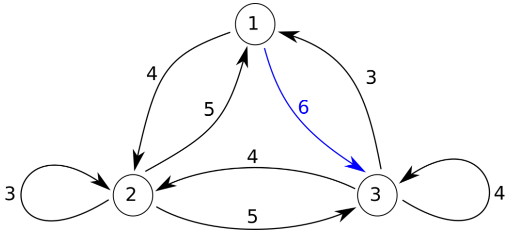
Pour A carrée,

$$A^k = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ fois}} \text{ avec } A^0 = \begin{pmatrix} e & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & e \end{pmatrix}.$$

$A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

$\mathcal{G}(A)$: graphe orienté et pondéré avec n sommets et une arête (j, i) de poids A_{ij} si $A_{ij} \neq \varepsilon$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



Matrices max-plus et graphes

Outil logiciel

- Librairie Maxplus implémente un grand nombre d'algorithmes utiles pour les matrices max-plus :
  `http://www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/MaxplusToolbox.html`

- Intégrée à Scicoslab (dérivé de Scilab) :
  `http://www.scicoslab.org/`

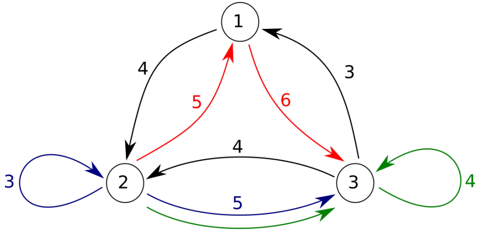
- Contributeurs : Michael McGettrick, Guy Cohen, Stéphane Gaubert et Jean-Pierre Quadrat

Matrices max-plus et graphes

Coefficients des puissances de A interprétés en termes de chemins optimaux dans $\mathcal{G}(A)$

A^k_{ij} poids maximaux des chemins de longueur k partant de j et terminant en i.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & 8 \\ 10 & \color{red}{11} & 9 \end{pmatrix}$$



Coefficients des puissances de A interprétés en termes de chemins optimaux dans $\mathcal{G}(A)$

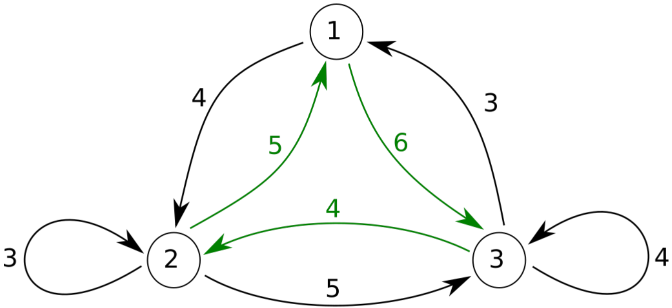
A^k_{ij} poids maximaux des chemins de longueur k partant de j et terminant en i.

$Trace(A^k)$ $(= \bigoplus_{i=1}^{n} A^k_{ii})$ poids maximaux des circuits de longueur k.

Poids moyen maximal

$$\rho_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} Trace(A^k)^{1/k}$$

Poids moyen : poids divisé par la longueur.
Circuit critique : circuit de poids moyen égal à $\rho_{\max}(A)$.



$$\rho_{\max}(A) = \max\left(3, 4, \frac{9}{2}, \frac{12}{3}, \frac{15}{3}\right)$$

Un seul circuit critique (poids moyen : $\frac{5+6+4}{3} = \rho_{\max}$).

Résolution d'équations

Etoile de Kleene

$$A^* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k \quad avec \quad A^0 \text{ matrice identité.}$$

Solution de $x = Ax \oplus B$

Le plus petit x satisfaisant $x = Ax \oplus B$ est

$$x = A^*B.$$

- Solution valable dans n'importe quel semi-anneau idempotent (solution bien connue notamment dans les semi-anneaux de langages).

Résolution d'équations

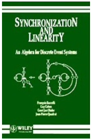
Solution de $Ax \preceq B$

Le plus grand x satisfaisant $Ax \preceq B$ est

$$x = A \backslash\!\!\!\circ\, B.$$

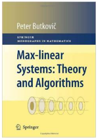
- Solution valable dans n'importe quel semi-anneau idempotent.
- Solution particulière de la théorie de la résiduation qui permet de définir des pseudo-inverses pour certaines applications isotones (qui préservent l'ordre) définies sur des ensembles ordonnés (dont les semi-anneaux idempotents).
- Dans $\mathbb{R}_{\max}$, $A \backslash\!\!\!\circ\, B = -(A^T \otimes (-B))$

Bibliographie



Synchronization and linearity : An Algebra for Discrete Event Systems, François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder
and Jean-Pierre Quadrat, Wiley, 1992 Stock épuisé, téléchargeable depuis
`https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/book-online.html`

Max Plus at Work : Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications, Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder and Jacob van der Woude, 2005, Princeton



Max-linear Systems : Theory and Algorithms, Peter Butkovic, 2010, Springer

Bibliographie

- Support du cours *Théorie algébrique des systèmes à événement discrets* de Guy Cohen :
  `https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/CoursSED.pdf`

- Support de cours *Algèbre max-plus et systèmes à événements discrets* de Stéphane Gaubert :
  `http://www.cmap.polytechnique.fr/ gaubert/deamines.html`

- Texte introductif **Modélisation à l'aide de systèmes (max,+) linéaires** de Jean Mairesse :
  `https://www-apr.lip6.fr/ mairesse/Article/modelDRET.ps.gz`

- Nombreux manuscrits de thèse sur le sujet.

Plan

Automatique des systèmes max-plus linéaires

Objectif :

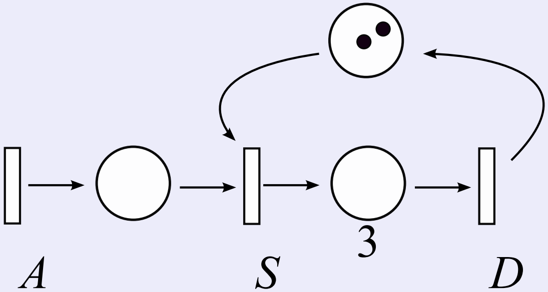
La théorie max-plus fournit un cadre algébrique pour décrire une sous-classe des SED temporisés avec des *modèles linéaires*. Les *Graphes d'Evénements Temporisés (GET)* relèvent de cette classe.

Dans cette partie, nous donnons des éléments de modélisation des GET, en nous appuyant sur la théorie max-plus. Les modèles obtenus possèdent certaines analogies avec les modèles linéaires de la théorie classique.

On peut ainsi aboutir à des représentations d'état ou des représentations entrée-sortie (notion de transfert).

Graphes d'Evénements Temporisés (GET)

Les GET constituent une sous-classe des Réseaux de Petri temporisés :



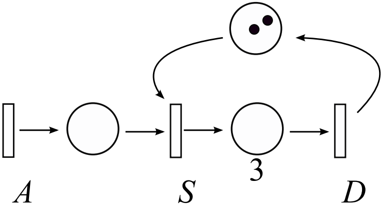
- chaque place a **exactement** une transition en amont et en aval
- les places peuvent avoir un temps de séjour minimal non nul

Dans cet exemple, un jeton doit séjourner au minimum 3 *unités de temps dans la place* $S \rightarrow D$.

- Transition d'entrée (ou source) : transition sans place d'entrée
- Transition de sortie (ou puits) : transition sans place de sortie

Fonctionnement au plus tôt (ASAP)

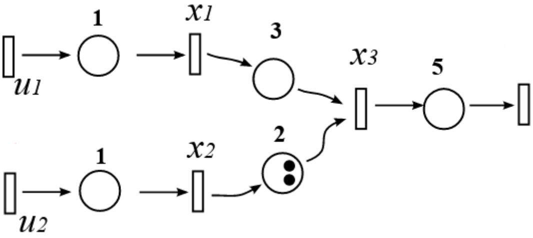
Toutes les transitions (excepté les entrées) sont franchies dès qu'elles sont franchissables.



C'est le mode de fonctionnement *IMPLICITE* dans la modélisation max-plus.

Exemple 1

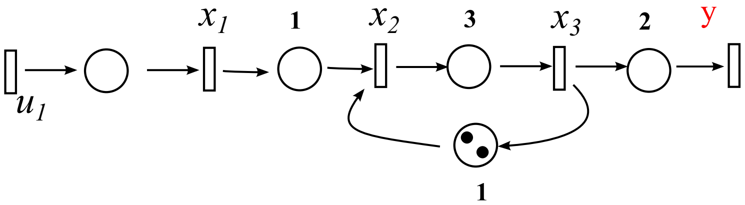
- Chaque place (cercle) a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie
- Un temps de séjour est associé aux places



- Les transitions internes (x_1, x_2, x_3) sont franchies *au plus tôt*
  Le tir d'une transition consomme un jeton dans chaque place en entrée et produit un jeton dans chaque place en sortie
- Les événements d'entrée (u_1, u_2)

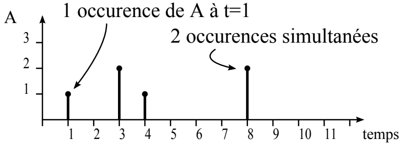
Exemple 2 (animation)

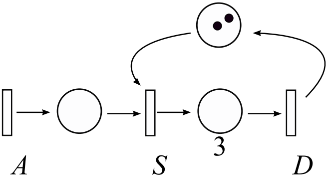
Le marquage d'un circuit est constant. Les circuits produisent des phénomènes cycliques.



Outils de modélisation : liste d'événements

C'est la représentation des occurrences des événements dans le temps, par exemple sous la forme de paires (event,date). On peut décrire les tirs des transitions d'un GET de cette façon.

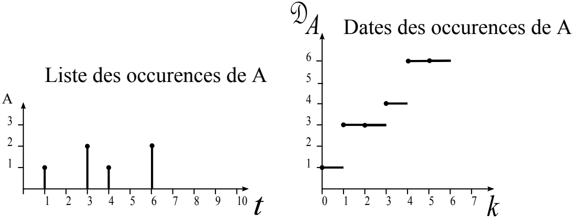




Liste des événements A : $(A,1)(A,3)(A,3)(A,4)(A,8)(A,8)\ldots$

Remarque (simulation) : au sein des simulateurs, on peut utiliser cette représentation : cette liste est alors appelée *échéancier*.

Dateurs : date de déclenchement des événements
Par convention, le premier événement est numéroté k=0.



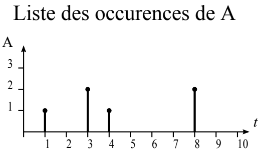
Fonction dateur associée à l'événement A :

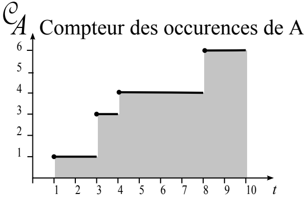
$$\mathcal{D}_A(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, t \mapsto \text{date de l'occurence numéro k de } A$$

Exemple : $\mathcal{D}_A(0) = 1, \mathcal{D}_A(1) = 3, \mathcal{D}_A(2) = 3, \mathcal{D}_A(3) = 4, ...$
Les fonctions dateurs sont **monotones croissantes** :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{D}_A(k+1) \geq \mathcal{D}_A(k)$$

Compteur : nombre cumulé d'occurences





Fonction compteur associée à l'événement A :

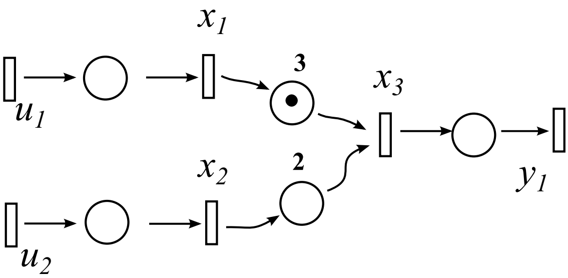
$$\mathcal{C}_A(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, t \mapsto \text{nombre d'occurences de } A \text{ jusqu'à } t$$

Exemple : $\mathcal{C}_A(0) = 0, \mathcal{C}_A(1) = 1, \mathcal{C}_A(2) = 1, \mathcal{C}_A(3) = 3, \ldots$
Les fonctions compteurs sont **monotones croissantes** :

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \mathcal{C}_A(t+1) \geq \mathcal{C}_A(t)$$

Exemple : exécution au plus tôt pour un GET

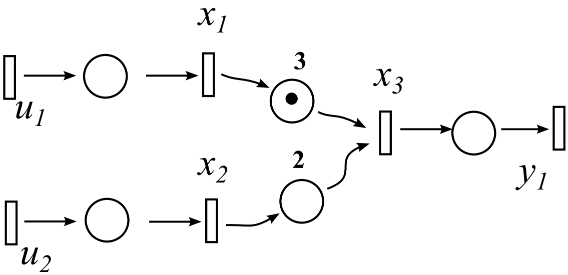
Equations dateurs



Le deuxième tir de x_3 dépend du premier tir de x_1 et du deuxième tir de x_2

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{D}_{x_1}(k) & = & \mathcal{D}_{u_1}(k) \\
\mathcal{D}_{x_2}(k) & = & \mathcal{D}_{u_2}(k) \\
\mathcal{D}_{x_3}(k) & = & \max(\mathcal{D}_{x_1}(k-1)+3, \mathcal{D}_{x_2}(k)+2) \\
\mathcal{D}_{y_1}(k) & = & \mathcal{D}_{x_3}(k)
\end{array}$$

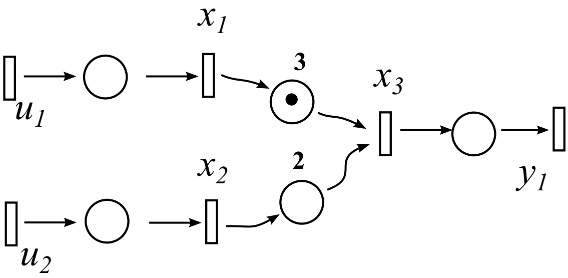
Equations dateurs : dans l'algèbre max-plus



Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$: $\oplus = \max$, $\otimes = +$, $\varepsilon = -\infty$ *et* $e = 0$
$x_1(k < 0) = x_2(k < 0) = x_3(k < 0) = \varepsilon$,

$$\begin{aligned} x_1(k) &= u_1(k) \\ x_2(k) &= u_2(k) \\ x_3(k) &= 3 \otimes x_1(k-1) \oplus 2 \otimes x_2(k) \\ y_1(k) &= x_3(k) \end{aligned}$$

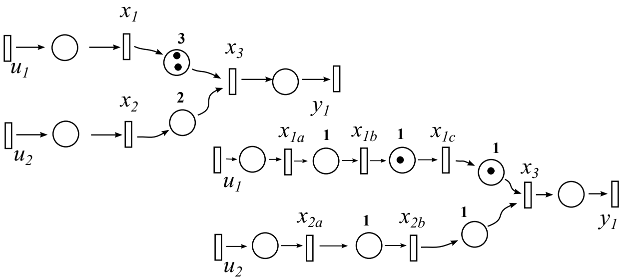
Equations compteurs : représentation linéaire sur l'algèbre min-plus



$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}_{x_1}(t) & = & \mathcal{C}_{u_1}(t) \\
\mathcal{C}_{x_2}(t) & = & \mathcal{C}_{u_2}(t) \\
\mathcal{C}_{x_3}(t) & = & \min(\mathcal{C}_{x_1}(t-3)+1, \mathcal{C}_{x_2}(t-2)) \\
\mathcal{C}_{y_1}(t) & = & \mathcal{C}_{x_3}(t)
\end{array}
$$

Forme standard des modèles

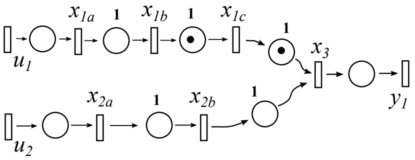
A comportement entrée-sortie équivalent, on peut augmenter le nombre de transitions internes pour que toute place ait **un temps de séjour de au plus 1 unité** (voire au plus un jeton).



Remarque : le marquage initial décrit l'état du système à $t = -\infty$. Ce marquage peut être différent à $t \neq -\infty$ (fonctionnement au plus tôt). Par exemple, le jeton dans $x_{1b} \to x_{1c}$ à $t = -\infty$ sera dans la place $x_{1c} \to x_3$ à $t \neq -\infty$. D'où l'équivalence.

Grâce à cette technique, tout GET peut se ramener sous la forme

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$



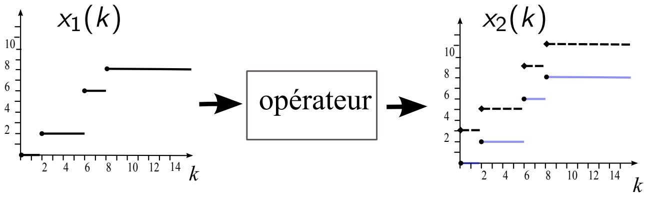
Puisque l'équation $x = Mx \oplus N$ admet $M^* N$ comme plus petite solution, le système s'écrit également

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

avec $A = A_0^* A_1$.

On peut également décrire un GET par des opérateurs agissant sur les signaux attachés aux transitions. Soit $\Sigma_{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions dateurs. Cet ensemble correspond aux signaux.

Un **opérateur** est une application définie sur $\Sigma_{\mathcal{D}}$. Un opérateur associe un dateur à un dateur (*i.e.* un signal à un signal).



L'opérateur qui associe $x_1 \mapsto x_2$ est un décalage temporel de 3 unités.

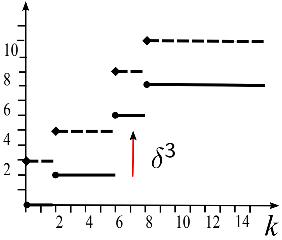
Opérateurs élémentaires : γ^n et δ^t

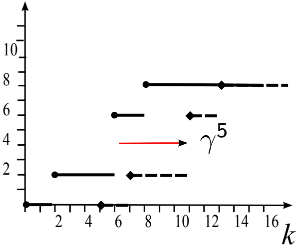
Les opérateurs élémentaires nécessaires à la description des GET sont notés δ^τ (décalage temporel de τ unités) et γ^ν (décalage événementiel de ν unités)

Soit $x \in \Sigma_{\mathcal{D}}$ un dateur,

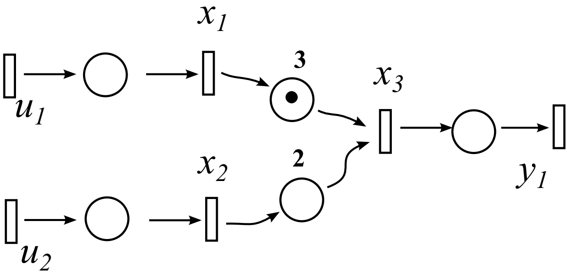
$$\begin{array}{rl} \gamma^\nu : & x \mapsto \gamma^\nu x, \quad \{\forall k, (\gamma^\nu x)(k) = x(k-\nu)\} \\ \delta^\tau : & x \mapsto \delta^\tau x, \quad \{\forall k, (\delta^\tau x)(k) = x(k) + \tau\} \end{array}$$

Exemple : $x(k)$ en trait plein, $(\delta^3 x)(k)$ et $(\gamma^5 x)(k)$ en tirets.





Description d'un GET par des opérateurs



$$\begin{aligned}
x_1 &= \delta^0 u_1 \\
x_2 &= \delta^0 u_2 \\
x_3 &= \gamma^1 \circ \delta^3 x_1 \oplus \delta^2 x_2 \\
y_1 &= \delta^0 x_3
\end{aligned}$$

Propriétés des opérateurs γ et δ

Soit $x_1, x_2 \in \Sigma_{\mathcal{D}}$ et $x_1 \oplus x_2 = \max(x_1, x_2)$ un dateur.

γ et δ sont des opérateurs additifs

$$\gamma^{\nu}(x_1 \oplus x_2) = (\gamma^{\nu} x_1) \oplus (\gamma^{\nu} x_2)$$

$$\delta^{\tau}(x_1 \oplus x_2) = (\delta^{\tau} x_1) \oplus (\delta^{\tau} x_2)$$

La composition de γ et δ commute

$$\gamma^1(\delta^2 x_1) = \delta^2(\gamma^1 x_1) = (\gamma^1 \circ \delta^2)x_1 = (\delta^2 \circ \gamma^1)x_1$$

Identités

$$\gamma^{n_1} \circ \gamma^{n_2} = \gamma^{n_1+n_2}$$

$$\delta^{t_1} \circ \delta^{t_2} = \delta^{t_1+t_2}$$

Dioïde d'opérateurs : $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

On construit le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ comme l'ensemble des opérateurs créés à partir de γ et δ avec les opérations internes $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :
$w_1, w_2 \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ des opérateurs,

$$\begin{aligned} w_1 \oplus w_2 &\triangleq \{w | \forall x \in \Sigma_{\mathcal{D}}, wx = \max(w_1x, w_2x)\} \\ w_1 \otimes w_2 &\triangleq \{w | \forall x \in \Sigma_{\mathcal{D}}, wx = (w_1 \circ w_2)x\} \end{aligned}$$

Le produit (commutatif) de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est la composition d'opérateurs. La somme est la synchronisation.

Eléments neutres de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

$$e = \gamma^0 = \delta^0 \text{ (opérateur identité)}$$

$$\varepsilon \triangleq \{\forall x, \forall k, \varepsilon(x)(k) = -\infty\} \text{ (opérateur nul)}$$

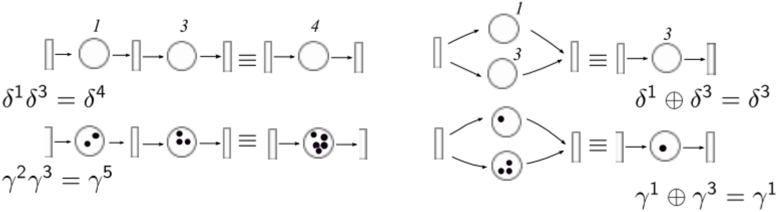
Remarque : on considère parfois que l'opérateur nul ε peut s'écrire $\varepsilon = \gamma^{+\infty} = \delta^{-\infty}$

Identités de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

Le dioïde d'opérateurs $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est caractérisé par les identités remarquables suivantes : (on omet $\otimes$ pour alléger)

$$\begin{aligned}
\gamma^n\delta^t &= \delta^t\gamma^n & \varepsilon\gamma^n &= \varepsilon\delta^t = \varepsilon \\
\gamma^{n_1}\gamma^{n_2} &= \gamma^{n_1+n_2} & \delta^{t_1}\delta^{t_2} &= \delta^{t_1+t_2} \\
\gamma^{n_1}\oplus\gamma^{n_2} &= \gamma^{\min(n_1,n_2)} & \delta^{t_1}\oplus\delta^{t_2} &= \delta^{\max(t_1,t_2)}
\end{aligned}$$

Illustration (interprétation avec des GET)



Exemple de calcul dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

$$\begin{aligned}
(\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3) \otimes (\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4) &= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

Exemple de calcul dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

$$\begin{aligned}
(\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3) \otimes (\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4) &= \gamma^1\delta^2\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^1\delta^2\gamma^5\delta^4 \\
&\quad \oplus\gamma^3\delta^3\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3\gamma^5\delta^4 \\
&= \gamma^1\gamma^2\delta^2\delta^3 \oplus \gamma^1\gamma^5\delta^2\delta^4 \\
&\quad \oplus\gamma^3\gamma^2\delta^3\delta^3 \oplus \gamma^3\gamma^5\delta^3\delta^4 \\
&= \gamma^3\delta^5 \oplus \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^7
\end{aligned}$$

Notons que l'on peut simplifier

$$\gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^6 = (\gamma^6 \oplus \gamma^5)\delta^6 = \gamma^{\min(5,6)}\delta^6 = \gamma^5\delta^6$$

Soit,

$$(\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3) \otimes (\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4) = \gamma^3\delta^5 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^7$$

Remarque : tous les calculs peuvent donc toujours se ramener à une somme (finie ou infinie) de termes $\bigoplus \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$.

Définition formelle de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$)

L'introduction du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ comme un ensemble d'opérateurs relève d'un point de vue d'automaticien. Dans la littérature, ce dioïde est vu comme un ensemble de séries formelles.

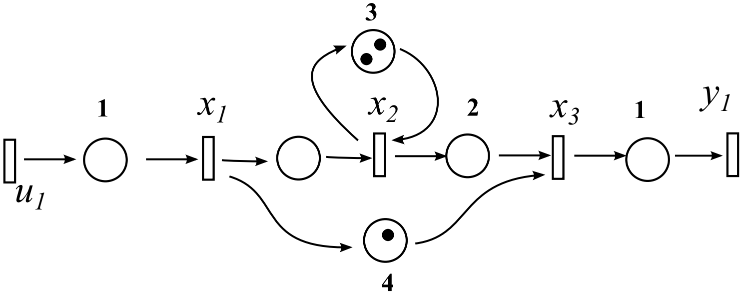
Définition ($\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$)

Le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est l'ensemble des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ, à coefficients booléens, à exposants dans $\mathbb{Z}$, pour lesquelles les règles de simplification suivantes s'appliquent

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')},$$

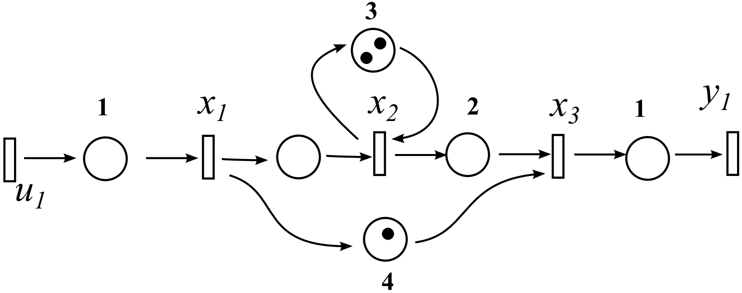
$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}.$$

Les dateurs (signaux) associés aux transitions sont liés par des opérateurs de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.



$$
\begin{aligned}
x_1 &= \delta^1 u_1 \\
x_2 &= e x_1 \oplus \gamma^2 \delta^3 x_2 \\
x_3 &= \delta^2 x_2 \oplus \gamma^1 \delta^4 x_1 \\
y_1 &= \delta^1 x_3
\end{aligned}
$$

Ecriture matricielle des relations :



En posant $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)'$, on peut décrire le GET par

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \\ \gamma^1\delta^4 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u_1 \\ y_1 &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^1 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

Fonction de transfert dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

Tous les GET peuvent être décrits par une représentation

$$\begin{array}{rcl} X & = & AX \oplus BU \\ Y & = & CX \end{array}$$

où A, B et C sont à valeurs dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.
Puisque $x = M^*N$ est la plus petite solution de $x = Mx \oplus N$, le vecteur X peut s'exprimer directement à partir de U

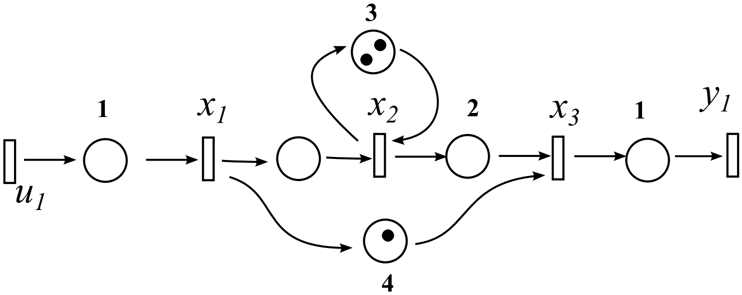
$$X = A^*BU = (A^0 \oplus A \oplus A^2 \oplus ...)BU.$$

Finalement, le vecteur de sortie Y peut s'exprimer directement à partir du vecteur d'entrée U

$$Y = CA^*BU.$$

La matrice $H = CA^*B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est la matrice de transfert du GET, elle décrit le comportement entrée-sortie du système.

Transfert entrée-sortie :



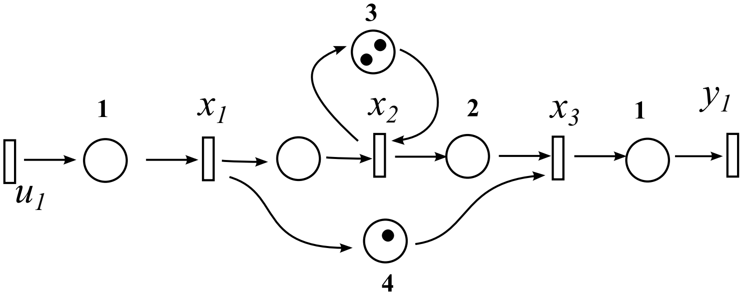
La matrice de transfert est définie par $H = CA^*B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \\ \gamma^1\delta^4 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^1 \end{pmatrix}$$

$H =$

Exemple : fonction de transfert dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

Transfert entrée-sortie :



La matrice de transfert est définie par $H = CA^*B$ avec

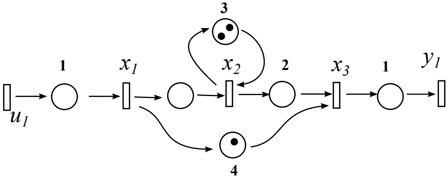
$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \\ \gamma^1\delta^4 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^1 \end{pmatrix}$$

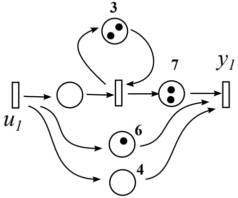
$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \\ \gamma^1\delta^4 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}^* \otimes \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^7(\gamma^2\delta^3)^*$$

Exemple : fonction de transfert dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

$$y_1 = HU = [\delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^7(\gamma^2\delta^3)^*]u_1$$

Les deux GET ci-dessous ont la même fonction de transfert :





Calculs rationnels dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

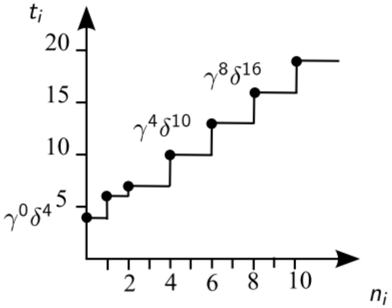
Opérateurs rationnels : obtenus par composition finie de sommes ($\oplus$), produits ($\otimes$) et étoile de Kleene des opérateurs γ^1, δ^1, e et ε.
$\Rightarrow$ la matrice de transfert est rationnelle
Librairie de calcul : tous les calculs rationnels sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ peuvent être automatisés (logiciel MinMaxGD). Les résultats peuvent être fournis sous une forme canonique ultimement périodique, c'est-à-dire

$$p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \bigoplus_{i=1}^{k} \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{\kappa} \gamma^{N_j}\delta^{T_j} \right) (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

Exemple : $\delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^7(\gamma^2\delta^3)^*$ est la forme périodique telle que $p = \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6$ (comp. transitoire),$q = \gamma^2\delta^7$ (motif), $\nu = 2$ et $\tau = 3$ (périodicité).
Performance : la paire (ν,τ) fournit un indicateur de performance du système. Le ratio ν/τ donne le taux de production du système.

Dans un opérateur $\bigoplus \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$, chaque terme peut être représenté dans un plan par un point de coordonnées (n_i, t_i).

Exemple : $\delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^7(\gamma^2\delta^3)^* = \gamma^0\delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^2\delta^7 \oplus \gamma^4\delta^{10} \oplus \ldots$

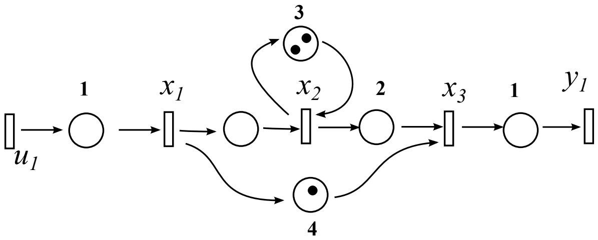


Remarque : après toutes les simplifications, les exposants n_i (resp. t_i) forment une suite strictement croissante : $n_i < n_{i+1}, \; t_i < t_{i+1}$

L'outil MinMaxGD JS

- En ligne
  - `http://perso-laris.univ-angers.fr/~lhommeau/minmaxgdcalc.html`

Mise en oeuvre avec la librairie MinMaxGD JS :




```
smatrix A(3,3),B(3,1),C(1,3);

A(2,1) = gd(0,0);
A(2,2) = gd(2,3);
A(3,1) = gd(1,4);
A(3,2) = gd(0,2);

B(1,1) = gd(0,1);

C(1,3) = gd(0,1);

/* Tranfer Matrix H=CA^*B */
H = C*star(A)*B;
```

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \\ \gamma^1\delta^4 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^1 \end{pmatrix}$$

```
    /* Tranfer Matrix H=CA^*B */
H =[1,1] = g^0 d^4+ g^1 d^6+( g^2 d^7)[ g^2 d^3]*

success
```

Equipe pédagogique

Equipe pédagogique

Auteurs : Bertrand Cottenceau, Guilherme Espindola-Winck, Mehdi Lhommeau, Sébastien Lahaye, Claude Martinez

Intervenants : Guilherme Espindola-Winck, Claude Martinez