Commande des GET

Formation Systèmes à Evénements Discrets

1ère édition
Janvier 2024

Société d'Automatique,
de Génie Industriel & de Productique

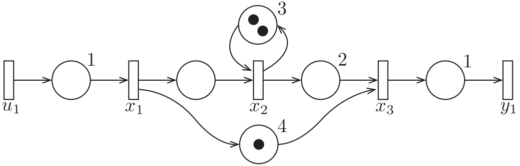
Plan

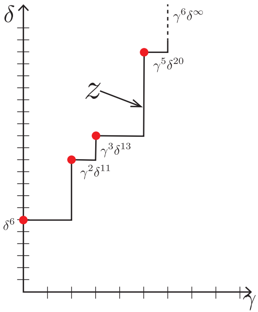
Commande des systèmes max-plus linéaires : Commande en juste-à-temps

Commande en juste-à-temps

Objectif

Soit z une trajectoire de sortie désirée. On cherche une commande u_1 telle que la sortie du système soit la plus proche possible de z tout en respectant la contrainte $y_1 \leq z$.





Commande en juste-à-temps (IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Solution

- Soit

$$\begin{cases} x & = & Ax \oplus Bu \\ y & = & Cx \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times m}$, $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times n}$, $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n}$, $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{m}$ et $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p}$.

Commande en juste-à-temps (IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Solution

- Soit

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times m}$, $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times n}$, $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n}$, $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{m}$ et $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p}$.

- Le transfert est donné par :

$$H = CA^*B.$$

Commande en juste-à-temps (IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Solution

- Soit

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times m}$, $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times n}$, $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n}$, $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{m}$ et $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p}$.

- Le transfert est donné par :

$$H = CA^*B.$$

- Il faut chercher le plus grand u tel que

$$Hu = CA^*Bu \preceq z.$$

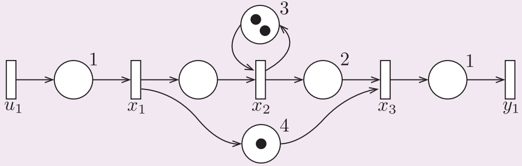
Commande en juste-à-temps (IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Solution

- Soit
$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$
avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n\times m}$, $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times n}$, $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{n}$, $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{m}$ et $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p}$.
- Le transfert est donné par :
$$H = CA^*B.$$
- Il faut chercher le plus grand u tel que
$$Hu = CA^*Bu \preceq z.$$
- La plus grande commande $u_{opt} = \bigoplus\{u \mid CA^*Bu \preceq z\}$ est donnée par
$$u_{opt} = (CA^*B) \backslash\!\!\circ z.$$

Commande en juste-à-temps(IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Exemple



$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \\ \gamma\delta^4 & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix}$$

```
smatrix A(3,3),B(3,1),C(1,3);

A(2,1) = gd(0,0);
A(2,2) = gd(2,3);
A(3,1) = gd(1,4);
A(3,2) = gd(0,2);
B(1,1) = gd(0,1);
C(1,3) = gd(0,1);
```

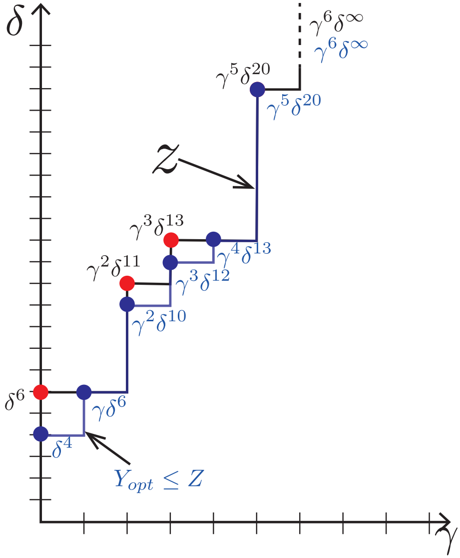
```
/* Tranfer Matrix H=CA^*B */
H = C*star(A)*B;
print H;
H =[1,1] = g^0 d^4+ g^1 d^6+
                    ( g^2 d^7)[ g^2 d^3]*
```

Commande en juste-à-temps(IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Exemple....suite

```
/* Reference output Z */
Z = series(eps,(0,6)(2,11)(3,13)(4,13)(5,20)(6,inf),(0,inf));
Z =[1,1] = g^0 d^6+ g^2 d^11+ g^3 d^13+ g^5 d^20+( g^6 d^inf)[ g^0 d^inf]*

/* Greatest Control such that HU = Y <= Z */
Uopt = H \ Z;
print Uopt;
Uopt =[1,1] = e+ g^1 d^2+ g^2 d^6+ g^3 d^7+ g^4 d^9+ g^5 d^16+
                                                    (g^6 d^inf)[ g^0 d^inf]*

/* The optimal output */
Yopt = H*Uopt;
print Yopt;
Yopt =[1,1] = g^0 d^4+ g^1 d^6+ g^2 d^10+ g^3 d^12+ g^4 d^13+ g^5 d^20+
                                                   ( g^6 d^inf)[ g^0 d^inf]*
```

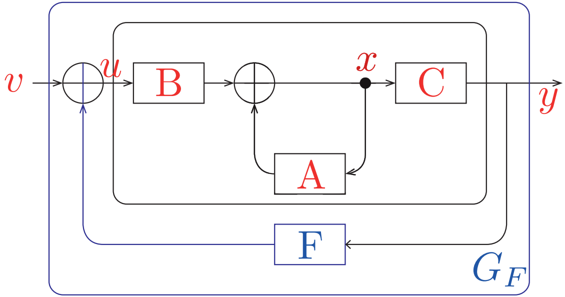
Trajectoires



Commande des systèmes max-plus linéaires : Commande en boucle fermée

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour de sortie



Boucle ouverte

$$y = Hu$$

Boucle fermée

$$\begin{cases} u &= Fy \oplus v \\ y &= HFy \oplus Hv \\ &= (HF)^* Hv \end{cases}$$

Objectif

Soit $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]^{p \times n}$. Calculer le plus grand correcteur de type retour de sortie, F, tel que

$$G_F = (HF)^* H \leq G_{ref}.$$

Proposition

L'inégalité $(HF)^* H \leq G_{ref}$ admet une plus grand solution

$$\hat{F} = H \backslash G_{ref} / H.$$

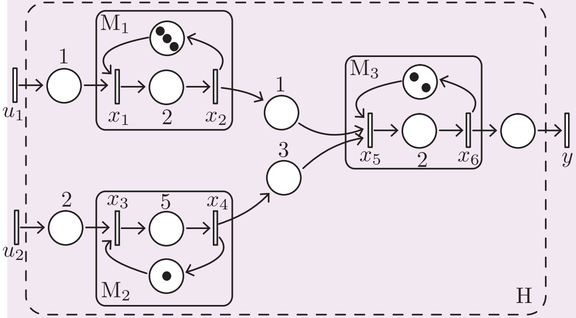
Correcteur neutre

Si $G_{ref} = H$, le plus grand correcteur est donné par

$$\hat{F} = H \backslash H / H.$$

Ce correcteur (plus grand) permet de retarder, le plus possible, l'entrée des jetons dans le système tout en préservant la sortie.

Exemple

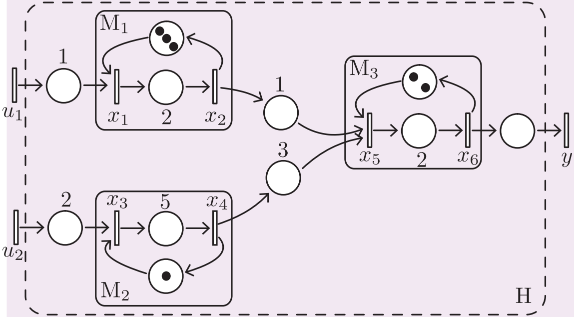


Donner A, B et C

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour de sortie

Exemple



$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour de sortie

Exemple

```
smatrix A(6,6),B(6,2),C(1,6);

A(1,3) = gd(3,0);
A(2,1) = gd(0,2);
A(3,4) = gd(1,0);
A(4,3) = gd(0,5);
A(5,2) = gd(0,1);
A(5,4) = gd(0,3);
A(5,6) = gd(2,0);
A(6,5) = gd(0,2);

B(1,1) = gd(0,1);
B(3,2) = gd(0,2);

C(1,6) = gd(0,0);
```

```
/* Tranfer Matrix H=CA^*B */
H = C*star(A)*B;
print H;

H =[1,1] = ( g^0 d^6)[ g^2 d^2]*
[1,2] = ( g^0 d^12)[ g^1 d^5]*
```

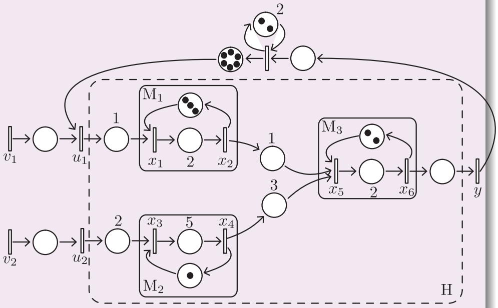
Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

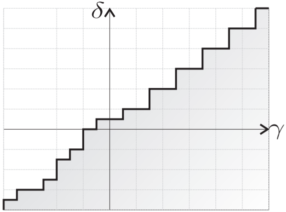
Poursuite de modèle - Retour de sortie

Exemple

```
/* Retour de sortie */
F = H \ H / H;
[1,1] eps+(g^0d^-6)[g^2d^2]*
[2,1] eps+(eps)[g^0d^0]*

/* Retour de sortie */
Fcaus = prcaus(F);
[1,1] eps+(g^6d^0)[g^2d^2]*
[2,1] eps+(eps)[g^0d^0]*

GF = star(H*F)*H;
[1,1] eps+(g^0d^6)[g^2d^2]*
[1,2] eps+(g^0d^12)[g^1d^5]*

H
=
[1,1] eps+(g^0d^6)[g^2d^2]*
[1,2] eps+(g^0d^12)[g^1d^5]*
```

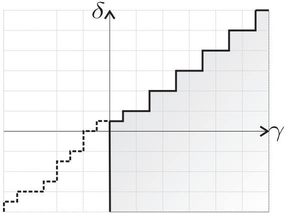
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Fy \oplus v = \begin{pmatrix} \gamma^6(\gamma^2\delta^2)^* \\ \varepsilon \end{pmatrix} y \oplus \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$





s : série non causale

$\mathrm{prcaus}(s)$



$\mathrm{prcaus}(s)$: plus grande série causale inférieure ou égale à s

Exemple - lois de commande

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Fy \oplus v = \begin{pmatrix} \gamma^6(\gamma^2\delta^2)^* \\ \varepsilon \end{pmatrix} y \oplus \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{u_1 = (\gamma^2\delta^2)^*\gamma^6 y \oplus v_1} = a^* b, a = (\gamma^2\delta^2)^*, b = \gamma^6 y \oplus v_1$

$u_1 = a^* b$ est la plus petite solution de $u_1 = au_1 \oplus b$ donc

$\boxed{u_1 = \gamma^2\delta^2 u_1 \oplus \gamma^6 y \oplus v_1}$

$$u_1(k) = \max(u_1(k-2)+2, y(k-6), v_1(k))$$

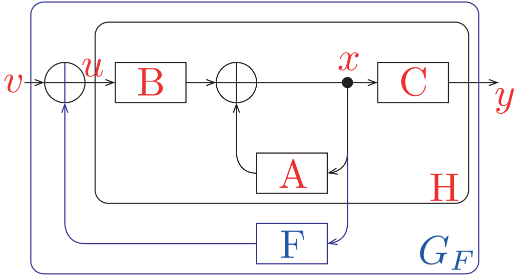
ou

$$u_1(t) = \max(u_1(t-2)+2, y(t)+6, v_1(t))$$

à implémenter dans un API

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état



Boucle ouverte

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \\ y = CA^* Bu = Hu \end{cases}$$

Boucle fermée

$$\begin{cases} u = Fx \oplus v \\ x = (A \oplus BF)^* Bv \\ y = C(A \oplus BF)^* Bv \end{cases}$$

Objectif

Soit $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]^{p \times n}$ le comportement structurel désiré en boucle fermée. Calculer le plus grand correcteur de type retour d'état, F, tel que

$$C(A \oplus BF)^* B = G_F \preceq G_{ref}.$$

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état

Proposition

Le plus grand correcteur F tel que $C(A \oplus BF)^* B \preceq G_{ref}$ est donné par

$$\hat{F} = H \backslash G_{\text{ref}} / (A^* B)$$

Correcteur neutre

Si $G_{ref} = H$, le plus grand correcteur est donné par

$$\hat{F} = H \backslash H / (A^* B) .$$

Ce correcteur permet de retarder, le plus possible, l'entrée des jetons dans le système tout en préservant la sortie.

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état

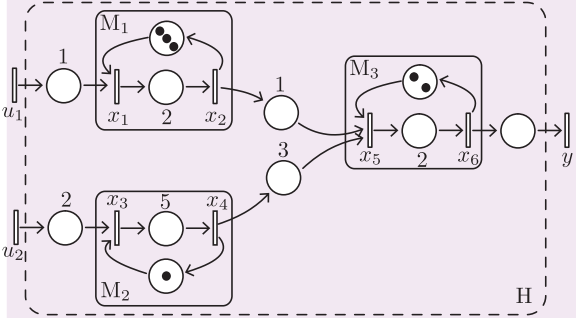
Relations entre correcteurs

Il est à noter que les correcteurs de type retour de sortie et de type retour d'état sont liés par la relation suivante : $\hat{F}_{sortie} = \hat{F}_{etat} / C$ c.-à-d. que $\hat{F}_{sortie} C = (\hat{F}_{etat} / C) C \preceq \hat{F}_{etat}$. Il apparaît donc que $(\hat{F}_{sortie} H)^* = (\hat{F}_{sortie} CA^* B)^* \preceq (\hat{F}_{etat} A^* B)^* \Rightarrow CA^* B(\hat{F}_{sortie} CA^* B)^* = G_{\hat{F}_{sortie}} \preceq CA^* B(\hat{F}_{etat} A^* B)^* = G_{\hat{F}_{etat}}$. Alors,

$$G_{\hat{F}_{sortie}} \preceq G_{\hat{F}_{etat}} \preceq G_{ref}$$

En d'autres termes, l'utilisation d'un correcteur de type retour d'état améliore les performances, c.-à-d. engendre une commande plus grande et un système corrigé plus proche du modèle de référence.

Exemple



$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état

Exemple

```
smatrix A(6,6),B(6,2),C(1,6);

A(1,3) = gd(3,0);
A(2,1) = gd(0,2);
A(3,4) = gd(1,0);
A(4,3) = gd(0,5);
A(5,2) = gd(0,1);
A(5,4) = gd(0,3);
A(5,6) = gd(2,0);
A(6,5) = gd(0,2);

B(1,1) = gd(0,1);
B(3,2) = gd(0,2);

C(1,6) = gd(0,0);
```

```
/* Tranfer Matrix H=CA^*B */
H = C*star(A)*B;
print H;

H =[1,1] = ( g^0 d^6)[ g^2 d^2]*
[1,2] = ( g^0 d^12)[ g^1 d^5]*

Gref = H;
AB = star(A)*B;
```

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état

Exemple

```
F = Gref \ Gref / AB;
print F;
F =[1,1] = ( g^0 d^-1)[ g^2 d^2]*
[1,2] = ( g^0 d^-3)[ g^2 d^2]*
[1,3] = ( g^0 d^4)[ g^1 d^5]*
[1,4] = ( g^0 d^-1)[ g^1 d^5]*
[1,5] = ( g^0 d^-4)[ g^2 d^2]*
[1,6] = ( g^0 d^-6)[ g^2 d^2]*
[2,1] = eps
[2,2] = eps
[2,3] = ( g^0 d^-2)[ g^1 d^5]*
[2,4] = ( g^0 d^-7)[ g^1 d^5]*
[2,5] = eps
[2,6] = eps
```

```
Fcaus = prcaus(F);
print Fcaus;

Fcaus =[1,1] = ( g^2 d^1)[ g^2 d^2]*
[1,2] = ( g^4 d^1)[ g^2 d^2]*
[1,3] = ( g^0 d^4)[ g^1 d^5]*
[1,4] = ( g^1 d^4)[ g^1 d^5]*
[1,5] = ( g^4 d^0)[ g^2 d^2]*
[1,6] = ( g^6 d^0)[ g^2 d^2]*
[2,1] = eps
[2,2] = eps
[2,3] = ( g^1 d^3)[ g^1 d^5]*
[2,4] = ( g^2 d^3)[ g^1 d^5]*
[2,5] = eps
[2,6] = eps
```

Conclusion

Conclusion

- Beaucoup d'autres structures de commande pour les GET :
  - "Le rejet de perturbation"
  - La commande avec un observateur
  - La commande sous contraintes (état, commande, durée,...)
  - ...

Equipe pédagogique

Equipe pédagogique

Auteurs : Bertrand Cottenceau, Guilherme Espindola-Winck, Mehdi Lhommeau, Sébastien Lahaye, Claude Martinez

Intervenants : Guilherme Espindola-Winck, Claude Martinez