Réseaux de Petri

Formation Systèmes à Evénements Discrets

1ère édition
Janvier 2024

Société d'Automatique,
de Génie Industriel & de Productique

I. Introduction

Les **réseaux de Petri (RdP)** ont été définis en 1962 par Carl Adam Petri, mathématicien allemand.

Carl Adam Petri

Les **réseaux de Petri** sont **une famille de formalismes** (paradigme) utilisés pour la modélisation, la simulation et l ’analyse des systèmes dynamiques, tout au long de leur cycle de vie.

Plan

Plan

Définitions de base des RdP

Structure statique

II.1. Structure statique

Un ***réseau de Petri*** (***RdP***) est un graphe orienté biparti dont les nœuds sont des places et des transitions.

Il est défini par un 4-uplet $\boldsymbol{PN = \langle P, T, Pre, Post \rangle}$:

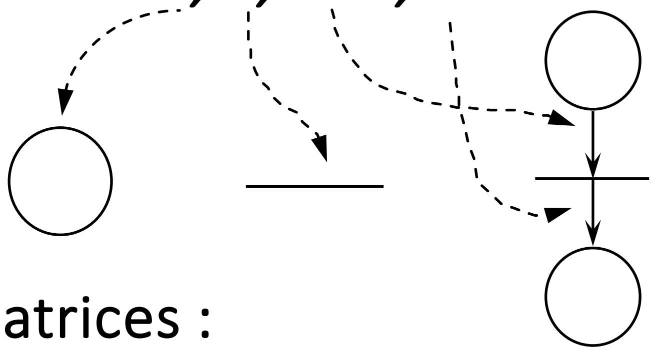
- P est l'ensemble fini des places, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$,
- T est l'ensemble fini des transitions, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$,
- $Pre : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence avant,
- $Post : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application d'incidence après.

Remarques :

- $P \cap T = \emptyset$; $T \neq \emptyset$ et $P \neq \emptyset$; $|P| = n$ et $|T| = m$.
- Si Pre et $Post \in \{0, 1\}$, le RdP est dit ***ordinaire***.

II.1. Structure statique

PN = < P, T, Pre, Post>



Matrices :

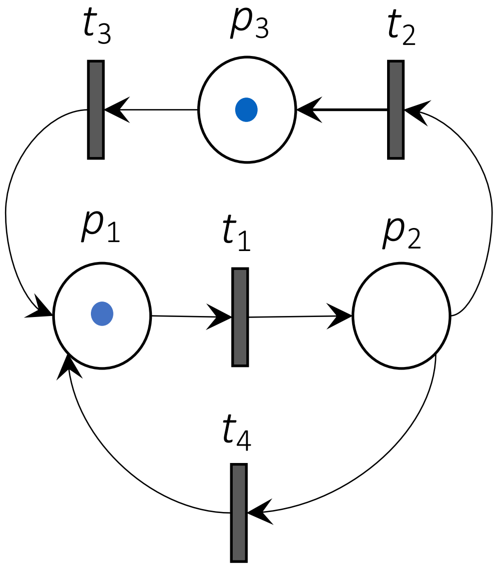
- Les matrices *Pre* et *Post* sont les matrices (n x m) où $Pre(\,.,\, t_j)$ et $Post(\,.,\, t_j)$ sont les colonnes de ces matrices associées à la transition t_j.
- La ***matrice d 'incidence W*** : $(P \times T) \rightarrow \mathbb{Z}$ est définie par ***W = Post - Pre***.

Notations :

- $^{\circ}t_j$ (resp. t_j°) : ensemble des places d'entrée (resp. de sortie) de t_j.
- $^{\circ}p_i$ (resp. p_i°) : ensemble des transitions d'entrée (resp. de sortie) de p_i.

II.1. Structure statique

Exemple.



$P = \{p_1, p_2, p_3\}$; $|P| = 3$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$; $|T| = 4$

$p_2{}^{\circ} = \{t_2, t_4\}$

$$Pre = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array}$$

$$Post = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array}$$

$$W = Post - Pre = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Structure dynamique

II.2. Structure dynamique

Un ***réseau de Petri marqué*** est un couple *(PN, M)* où :

- $PN = <P, T, Pre, Post>$ est un RdP,
- $\boldsymbol{M} : \boldsymbol{P} \rightarrow \mathbf{IN}$ est une fonction de ***marquage***.

Etat global du modèle :

$$M = (M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n)) = (m_1, m_2, \ldots, m_n).$$

$$\dim M = |P| = n.$$

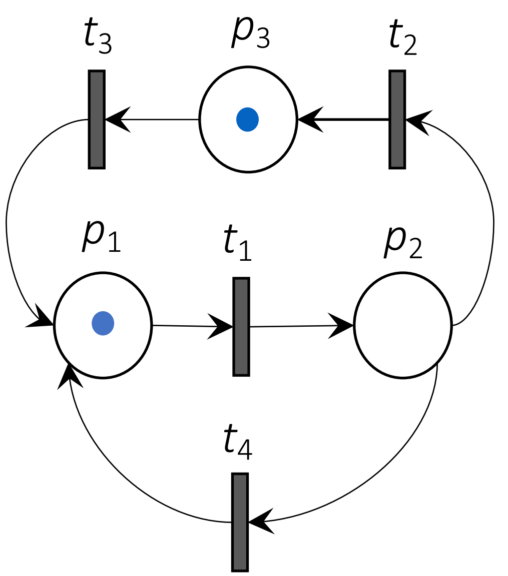
On note M_0 le marquage initial du RdP.

Exemple.

$$M = (M(p_1), M(p_2), M(p_3))$$

$$M = (m_1, m_2, m_3)$$

$$M_0 = (1, 0, 1)$$



II.2. Dynamique des RdP

Comportement asynchrone <=> un seul événement à un moment donné.

Une transition t_j est ***validée ou franchissable*** (ou tirable) pour un marquage M ssi :

$$M \geq Pre(.\,,t_j).$$

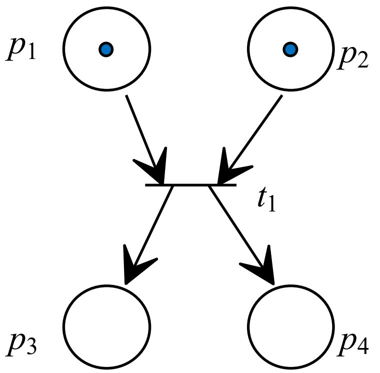
Le ***franchissement***, le ***tir*** ou la ***mise à feu*** d'une transition t_j consiste à retirer $Pre(p_i,t_j)$ jetons de chaque place d'entrée ($p_i \in {}^{\circ}t_j$) et à ajouter $Post(p_i,t_j)$ jetons dans chaque place de sortie ($p_i \in t_j^{\circ}$).

Ainsi, à partir du marquage M, le **franchissement d'une transition** $\boldsymbol{t_j}$ conduit au nouveau marquage M' défini comme suit :

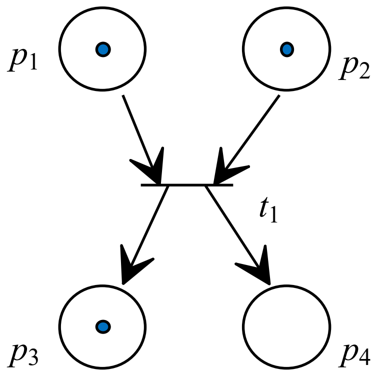
$$M' = M - Pre(\,.\,,\,t_j) + Post(\,.\,,\,t_j).$$

Exemple.

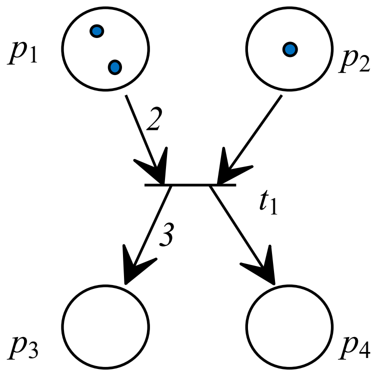
Validation d 'une transition :



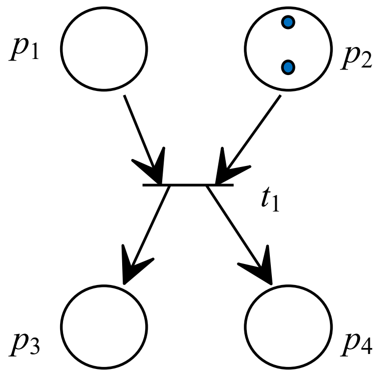
t_1 est ***franchissable***



t_1 est ***franchissable***

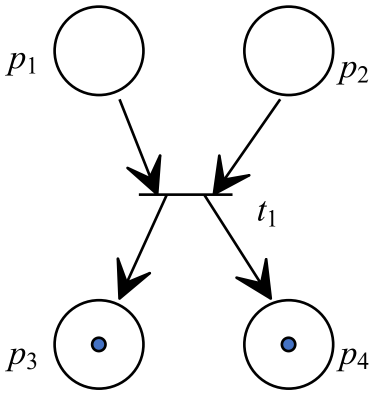


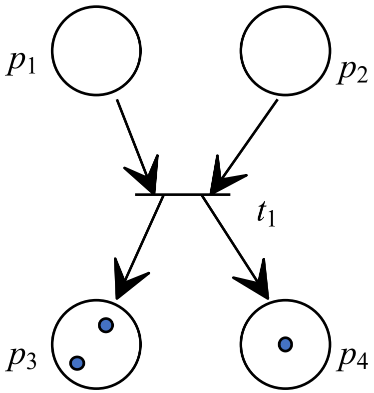
t_1 est ***franchissable***

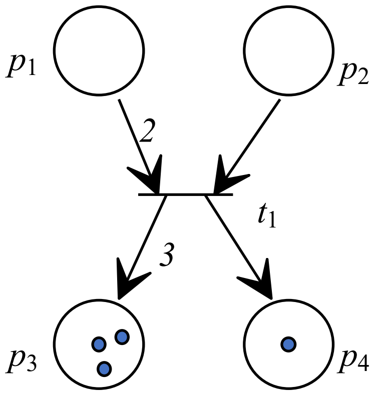


t_1 est *non* ***franchissable***

Franchissement d 'une transition :

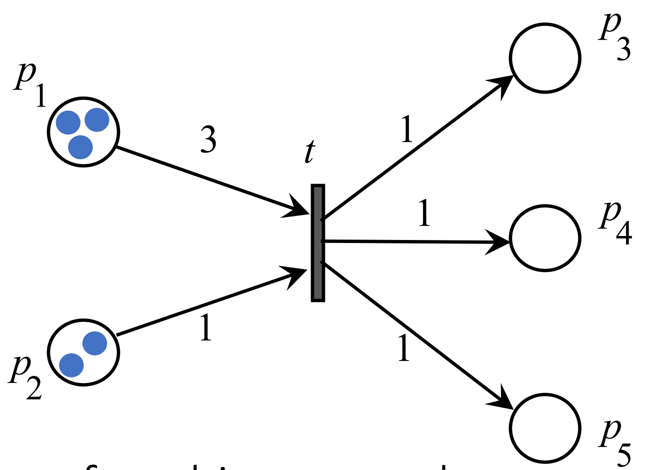




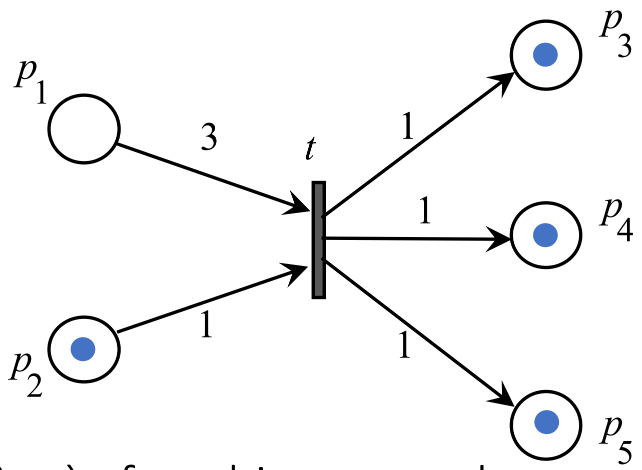


II.2. Dynamique des RdP

Exemple.



Avant franchissement de *t*.



Après franchissement de *t*.

$$M - Pre(\, . \, , t) + Post(\, . \, , t) = M'$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarque. Il n'y a pas conservation du nombre de jetons.

II.2. Dynamique des RdP

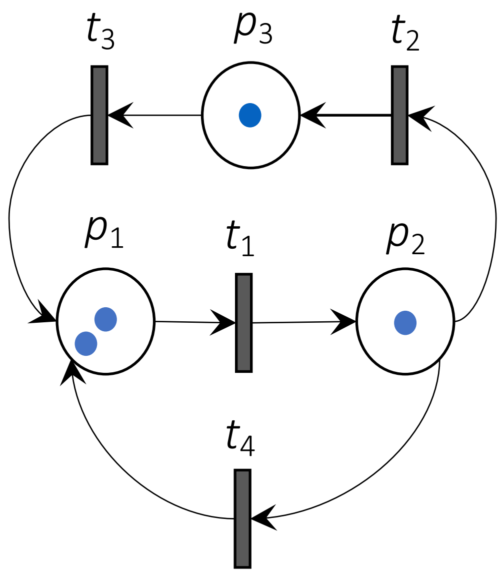
M $\xrightarrow{t_j}$ ***M'*** ou ***M*[*t*$_j$ > *M'***, signifie que *M'* est atteignable à partir de *M* en effectuant le franchissement de la transition t_j.

M $\xrightarrow{S}$ ***M'*** ou ***M*[*S* > *M'***, signifie que *M'* est atteignable à partir de *M* en effectuant le franchissement de la **séquence de transitions *S*.**

Exemple.

$S = t_1\, t_3\, t_4\, t_1.$

$M_0 = (1, 0, 1) \xrightarrow{t_1\, t_3\, t_4\, t_1} M' = (1, 1, 0)$



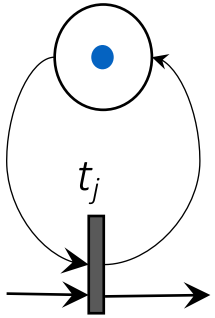
***R*(*M*$_0$)** ou ***A*(*PN*, *M*$_0$)** est l'ensemble des marquages atteignables à partir de M_0 en effectuant un ou plusieurs tirages, i.e., $R(M_0) = \{\, M \,/\, \exists\, S$ tel que $M_0 \xrightarrow{S} M \}$.

II.2. Dynamique des RdP

- Une ***transition source*** est une transition sans place d'entrée (elle est toujours franchissable).

  Une ***transition puits*** est une transition sans place de sortie.

- Une ***boucle*** (p_i, t_j) (aussi appelée ***boucle de réentrance*** ou ***self loop***) est telle que $p_i \in {}^{\circ}t_j$ et $p_i \in t_j^{\circ}$.



Un RdP est ***pur*** s'il ne contient pas de boucle.

Remarque. Dans la matrice d'incidence W, il y a perte de l'information concernant la « boucle ».

II.2. Dynamique des RdP

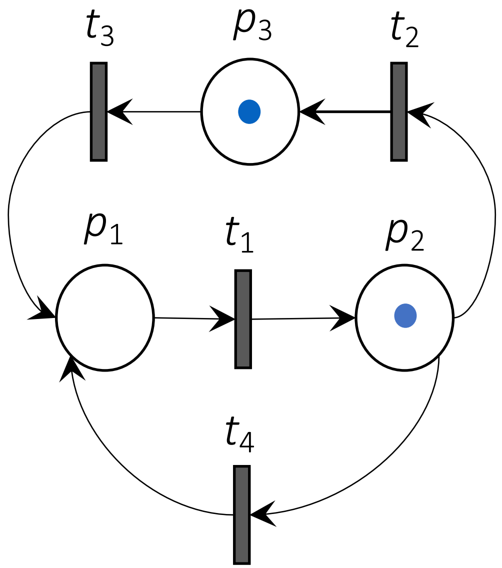
Conflits :

- Deux transitions t_j et t_l sont en ***conflit structurel*** ssi elles ont au moins une place d'entrée en commun, i.e., $°t_j \cap °t_l \neq \varnothing$.
- Deux transitions t_j et t_l sont en ***conflit effectif*** pour un marquage M ssi elles ont au moins une place d 'entrée p_i en commun telle que :

$$M(p_i) \geq Pre(p_i, t_j)$$
$$M(p_i) \geq Pre(p_i, t_l)$$

$$M(p_i) < Pre(p_i, t_j) + Pre(p_i, t_l) .$$

Exemple.

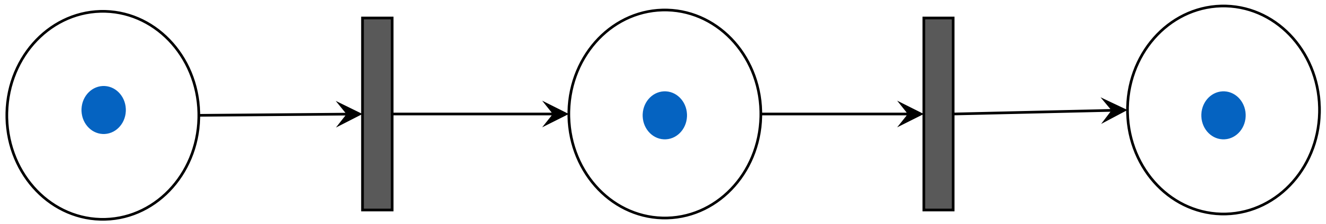


Les transitions t_2 et t_4 sont en conflit structurel.

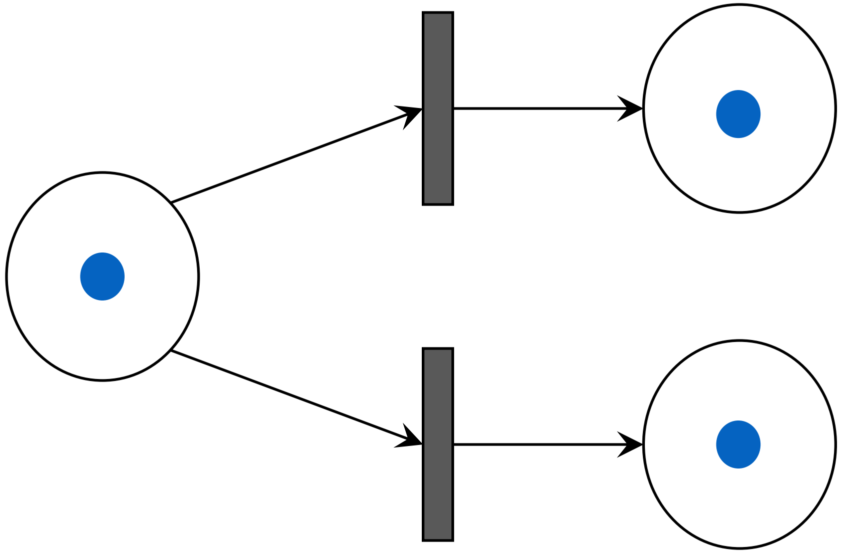
Pour M = (0, 1, 1) les transitions t_2 et t_4 sont en conflit effectif.

Constructions de base

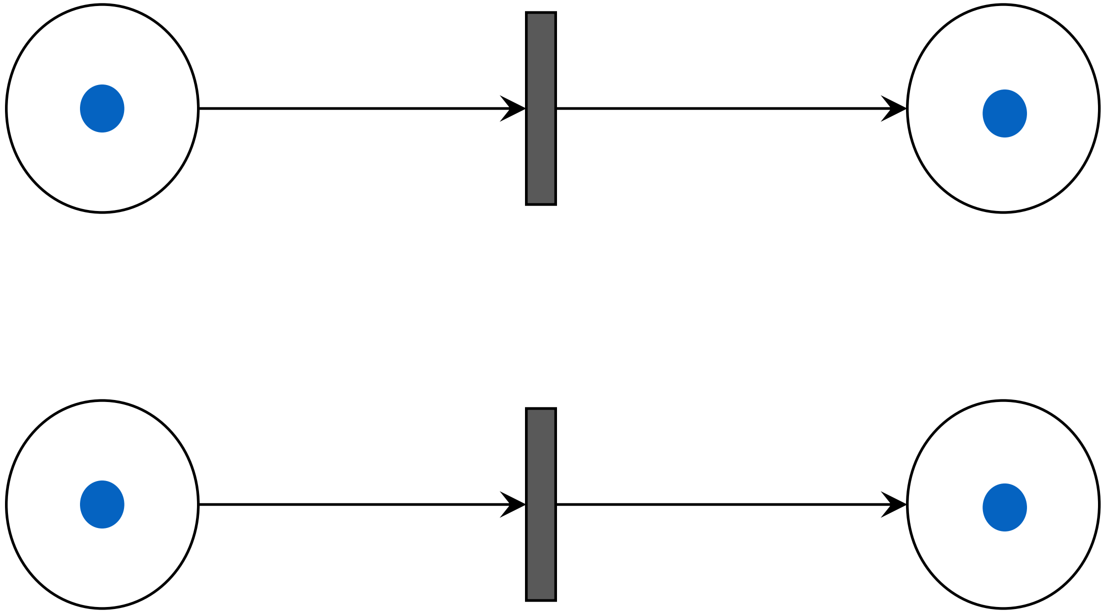
II.3.a. Actions séquentielles



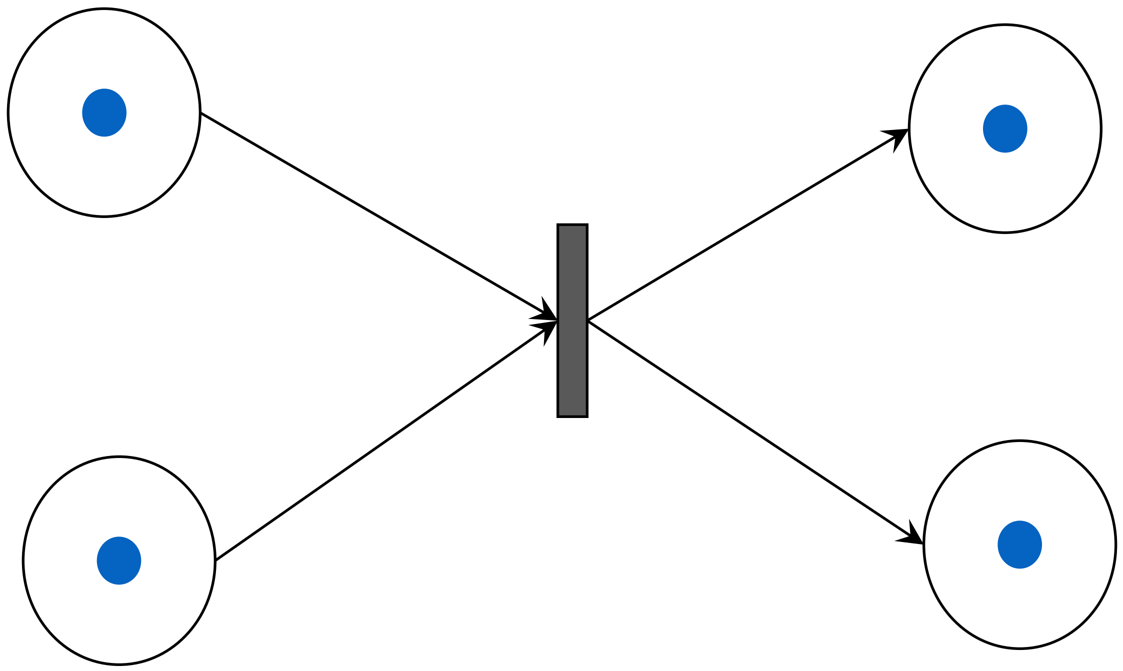
II.3.b. Non déterminisme / Choix



II.3.c. Indépendance causale / parallélisme



II.3.d. Synchronisation



Plan

Outils d'analyse des RdP

III. Outils d'analyse des RdP

Les principales méthodes d'analyse sont :

- Les méthodes basées sur l'énumération de tous les états accessibles du système : arbres ou graphes des marquages, arbres ou graphes de couverture.

- Les méthodes basées sur l'algèbre linéaire.

- Les méthodes de réduction du RdP.

Autres approches formelles :

» Graphes d'évolution, de marquage, « model checking », etc.
» Théorie des graphes, (Chretienne, 1983)
» Automates temporisés, (Alur *et al*., 1993), (Sifakis *et al*., 1995)
» Méthodes linéaires, (Silva *et al*., 1998)
» Algèbre des dïoides, (Bacceli *et al*., 1992)
» Markoviennes, (Natkin, 1980).

Graphe des marquages

III.1. Arbre et graphe des marquages

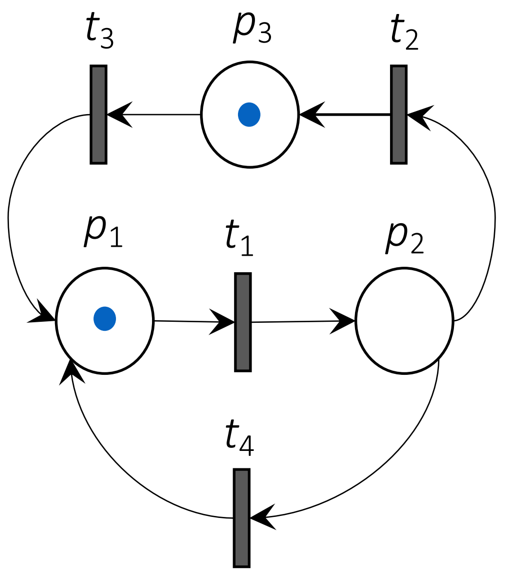
L'***arbre des marquages atteignables*** définit tous les marquages que le modèle peut atteindre à partir de M_0. Il s 'agit d 'une arborescence dans laquelle :

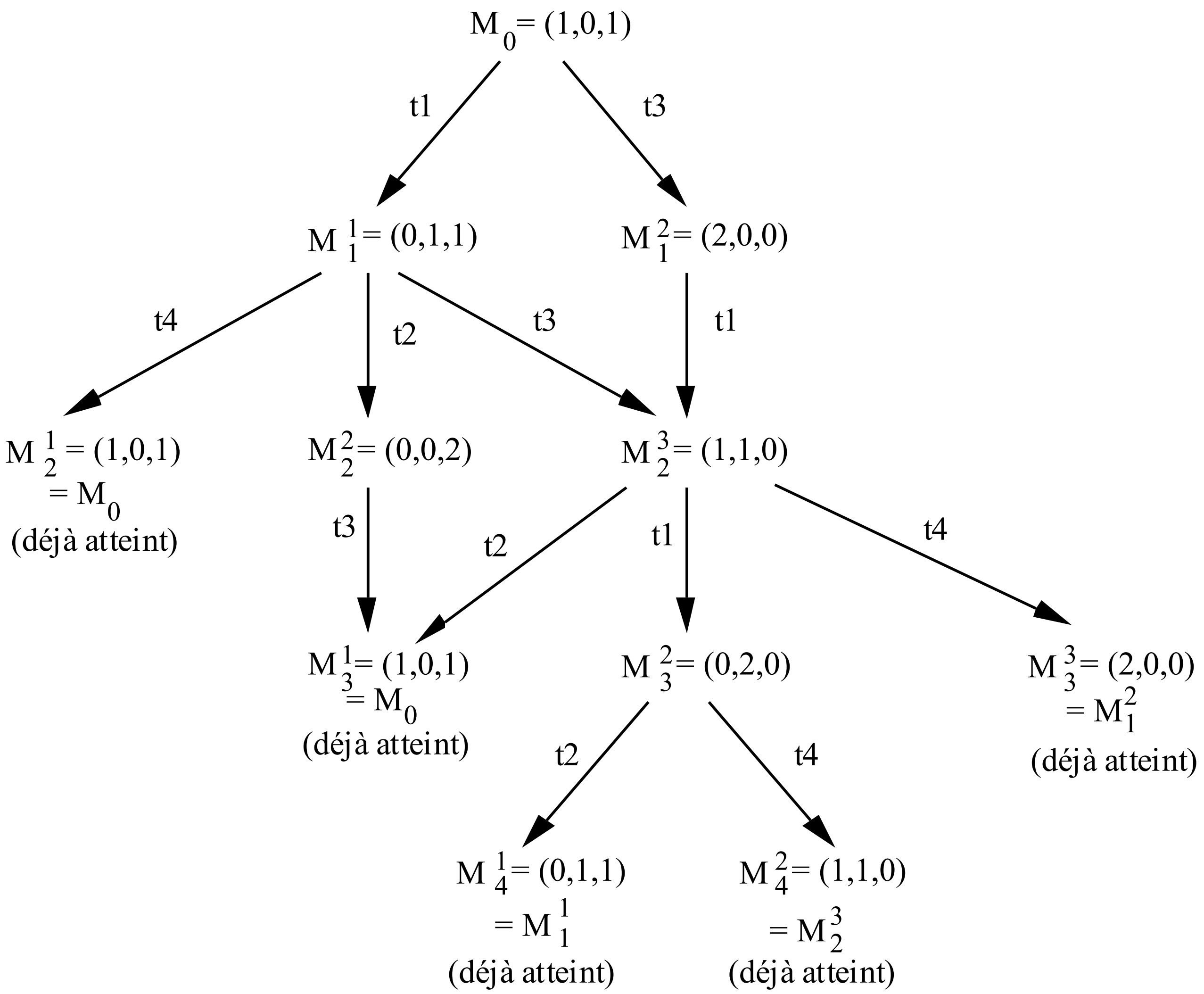
- les nœuds sont les marquages atteignables à partir de M_0,
- chaque arc représente le tirage d 'une transition,
- la racine de l 'arborescente correspond à M_0 .

On obtient le ***graphe des marquages atteignables*** en fusionnant les nœuds de l'arbre des marquages atteignables qui correspondent au même marquage.

III.1. Arbre des marquages

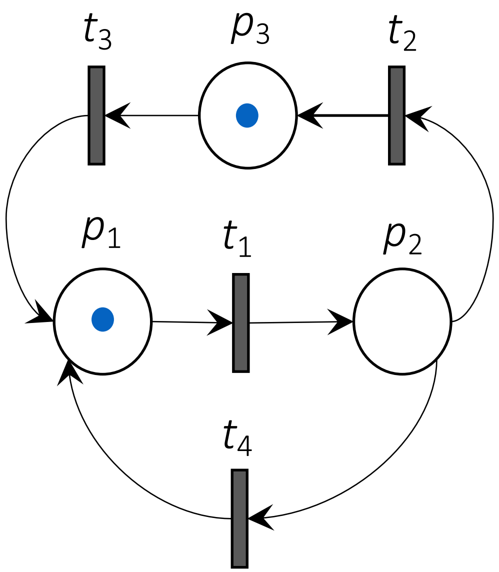
Exemple.

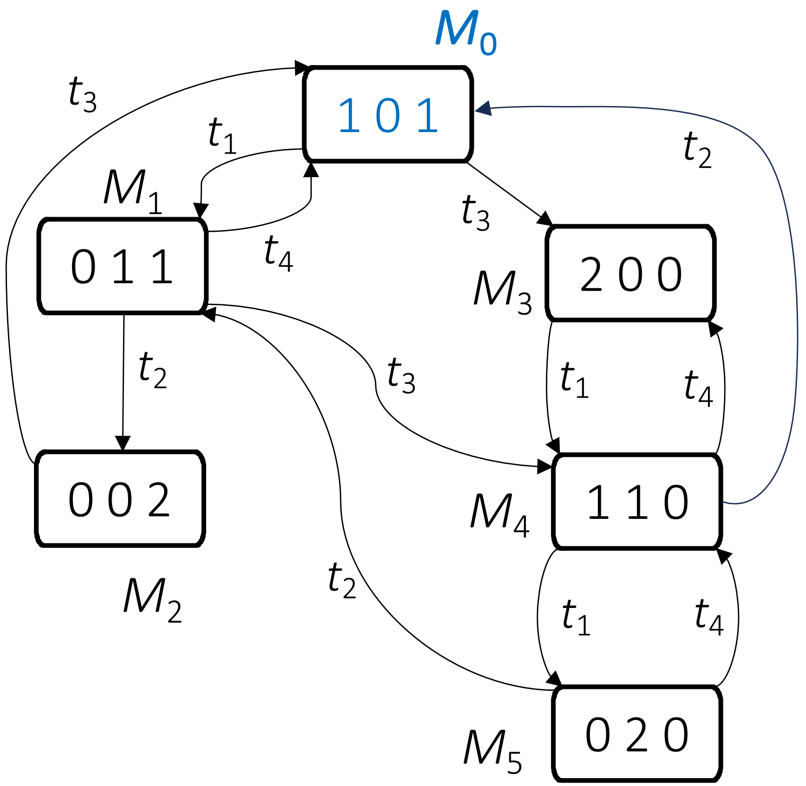




III.1. Arbre des marquages

Exemple.





Ensemble des marquages accessibles à partir de M_0 :
$R(M_0) = A(PN,M_0) = \{M_0, M_1, M_2, M_3 , M_4, M_5\}$:

Problème. Le nombre de marquages accessibles peut-être infini (propriété de non bornitude). Dans ce cas il est impossible de construire l'arbre des marquages.

Graphe de couverture

III.2. Arbre et graphe de couverture

L'***arbre de couverture*** (ou ***arbre de recouvrement***) limite la taille de l'arbre lorsque le nombre d'états n'est pas fini. Pour cela, un nouveau **symbole ω** qui correspond à «l'**infini**» est introduit.

Remarque. M' est supérieur à M ssi : $\forall p_j \in P, M'(p_j) \geq M(p_j)$ et $\exists p_i, M'(p_i) > M(p_i)$

L'algorithme de construction est le suivant :

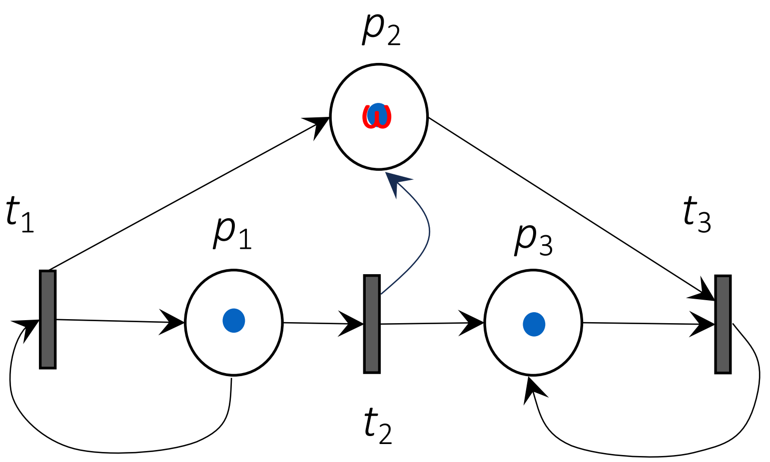
1. A partir de M_0, on crée tous les noeuds successeurs qui correspondent à des marquages M accessibles à partir de M_0 par le franchissement d'une transition. Si M est strictement supérieur à M_0 (i.e. $M(p_i) \geq M_0(p_i)\ \forall\ p_i \in P$ et $M \neq M_0$), on remplace par ω toutes les composantes de M qui sont strictement supérieures aux composantes correspondantes de M_0.

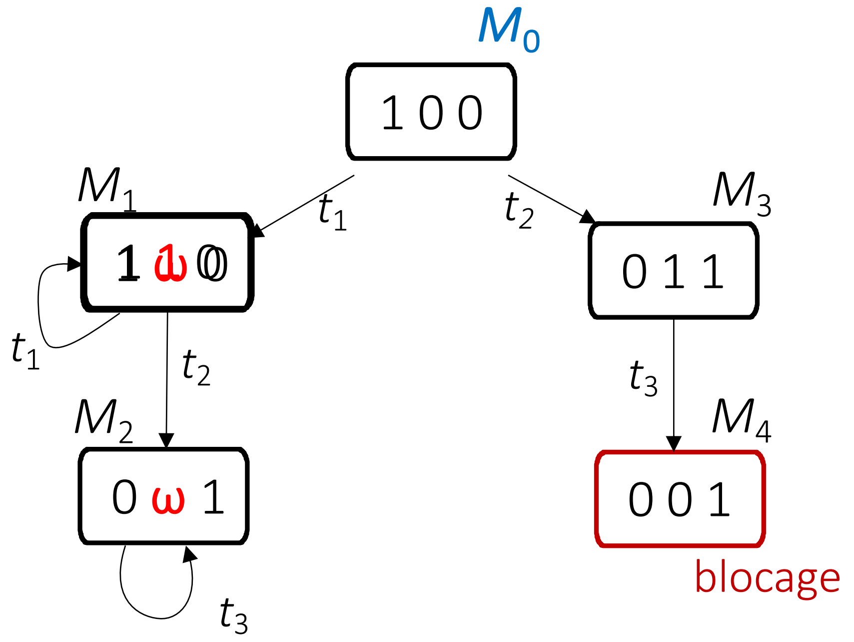
2. Pour chaque nouveau marquage M :

- S'il existe sur le chemin de M_0 à M un marquage identique à M, alors on ne crée pas de successeur au marquage M (M est marqué «déjà atteint»).
- Si à partir de M aucune transition n'est franchissable, M n'a pas de successeur et on retourne en 2 (M est marqué «blocage»).
- Sinon, on prolonge l'arbre en créant tous les noeuds successeurs de M en respectant les règles suivantes. Pour chaque successeur M' de M :
  - Une composante ω de M reste une composante ω pour M'.
  - S 'il existe sur le chemin de M_0 à M un marquage M'' tel que $M'(p_i) \geq M''(p_i)$, $\forall\ p_i \in P$ et $M' \neq M''$, alors on remplace par ω toutes les composantes de M' qui sont supérieures aux composantes de M''.

III.2. Graphe de couverture

Exemple.





Equation d’état

III.3. Equation d'état

L 'équation d'état est définie par :

$$M' = M + W.\underline{S}$$

où :

- *M* est le marquage initial.
- $\underline{S}$ est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissements *S* (dim $\underline{S}$ = |*T*|) dont la j[ème] composante correspond au nombre de franchissements de la transition t_j dans la séquence *S*.
- *M'* est le nouveau marquage obtenu à partir de *M* et après que la séquence de franchissement *S* ait été exécutée.

Remarque. L 'équation d'état ne garantit pas que la séquence *S* soit franchissable (i.e., si la séquence est réalisable). Elle donne uniquement le marquage final obtenu après une séquence de franchissement donnée.

III.3. Equation d'état

Exemple.

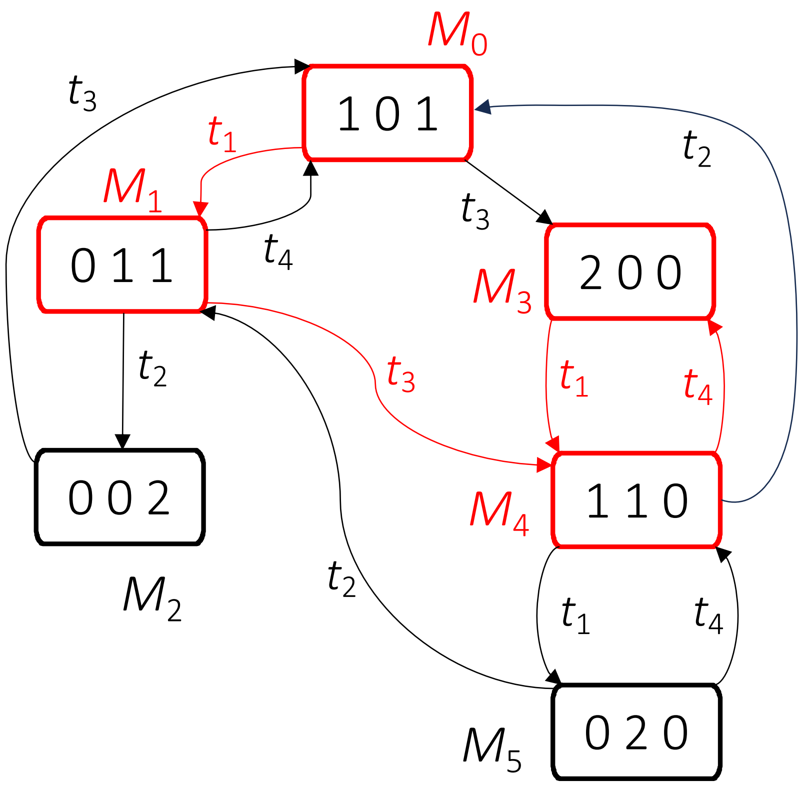
- A partir de $M_0 = (1, 0, 1)$,
  on applique la séquence de franchissement $S = t_1\, t_3\, t_4\, t_1$.

$$\underline{S} = (2, 0, 1, 1) = [2\ 0\ 1\ 1]^T$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

- ⚠️ Même résultat pour la séquence $S' = t_1\, t_1 t_3\, t_4$,
  mais séquence non réalisable à partir de M_0.

$S = t_1\, t_3\, t_4\, t_1.$



Invariants

III.4. P-invariant (ou invariant de places)

Un vecteur X de dimension $|P| = n$ tel que $X_i \in \mathbb{N}^+$, pour $i = 1, ..., n$, est appelé un ***P-invariant*** ou ***P-semi-flot*** si $\boldsymbol{X^T.W = 0}$, où W est la matrice d'incidence.

Un P-invariant X est minimal s'il n'existe aucun autre P-invariant ayant toutes ses composantes inférieures ou égales aux composantes correspondantes de X.

Le ***support*** d'un P-invariant X est l'ensemble des places auxquelles est associée une composante non nulle du P-invariant. C'est une composante conservative.

On dit que le support est minimal ssi il ne contient pas d'autre support de P-invariant que l'ensemble vide et lui-même.

III.4. P-invariant

Théorème 3.1. Soit X un P-invariant et M_0 le marquage initial d'un RdP. Alors, quel que soit le marquage M accessible à partir de M_0 ($M \in R(M_0)$), on a la relation suivante :

$$X^T.M = X^T.M_0$$

Démonstration.

$$M = M_0 + W.\underline{S}.$$

$$X^T.M = X^T.\ M_0 + X^T.\ W.\underline{S}.$$

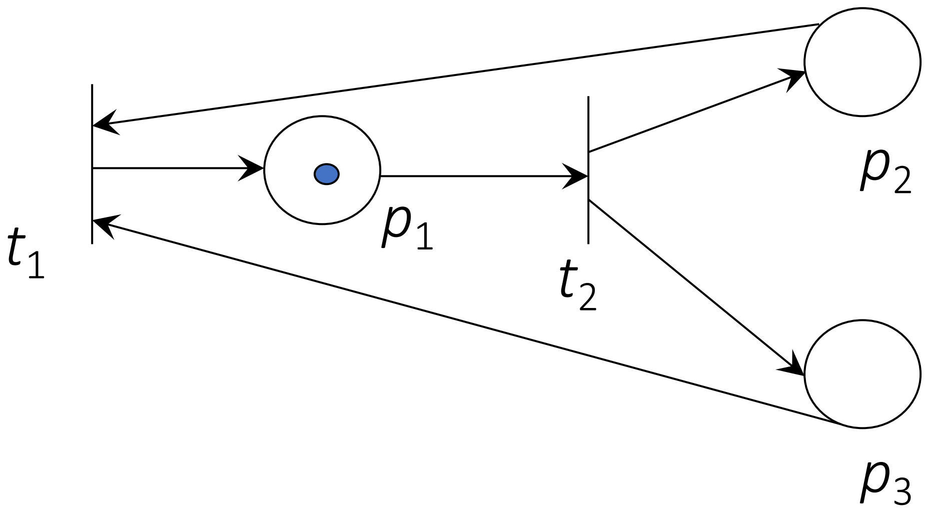
Si X est un P-invariant alors il vérifie : $X^T.W = 0$

donc $$X^T.M = X^T.M_0$$

Comme X et M_0 sont connus : $X^T.M$ = constante.

III.4. P-invariant

Exemple.



$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $X^T . W = 0$

Pour ce RdP, il y a 2 P-invariants minimaux :

$X_1 = (1, 1, 0)$ avec $\|X_1\| = \{p_1, p_2\}$

et

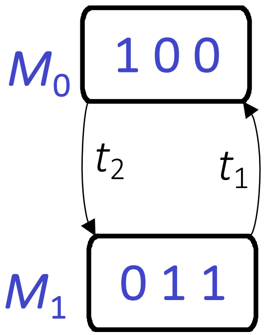
$X_2 = (1, 0, 1)$ avec $\|X_2\| = \{p_1, p_3\}$

- $X^T . M = X^T . M_0$

Pour $M_0 = (1, 0, 0)$:

$X_1 = (1, 1, 0)$ => $M(p_1) + M(p_2) = 1$

$X_2 = (1, 0, 1)$ => $M(p_1) + M(p_3) = 1$



III.4. T-invariant (ou invariant de transitions)

Un vecteur Y de dimension $|T|$ = m tel que $Y_i \in \mathbb{N}^+$, pour $i = 1, \ldots, m$, est appelé un ***T-invariant*** ou ***T-semi-flot*** si $\boldsymbol{W \cdot Y = 0}$, où W est la matrice d'incidence.

De la même façon que pour les P-invariants,

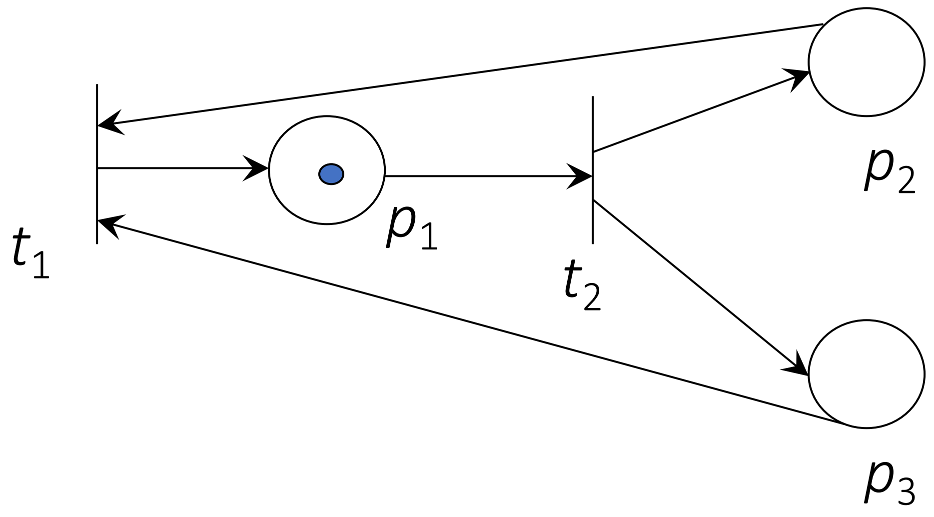
- Un T-invariant Y est minimal si il n'existe aucun autre T-invariant ayant toutes ses composantes inférieures ou égales aux composantes correspondantes de Y.
- On associe aux T-invariants un support qui est l'ensemble des transitions auxquelles est associée une composante non nulle du T-invariant.

Si Y est un T-invariant alors il vérifie : $M = M_0 + W \cdot Y = M_0$.

Les séquences de franchissement associées à un T-invariant, si elles sont réalisables, sont dites ***séquences répétitives***.

III.4. T-invariant

Exemple.



$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

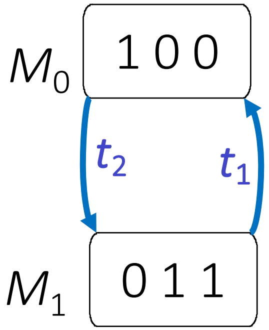
- $W \,.\, Y = 0$

Pour ce RdP, il y a 1 unique T-invariant minimal :
$Y = (1, 1)$ avec $\|Y\| = \{ t_1, t_2 \}$

- Pour $M_0 = (1, 0, 0)$, les deux séquences répétitives sont :

$S_Y = t_1\, t_2$ $\qquad M_1 \xrightarrow{t_1\, t_2} M_1$

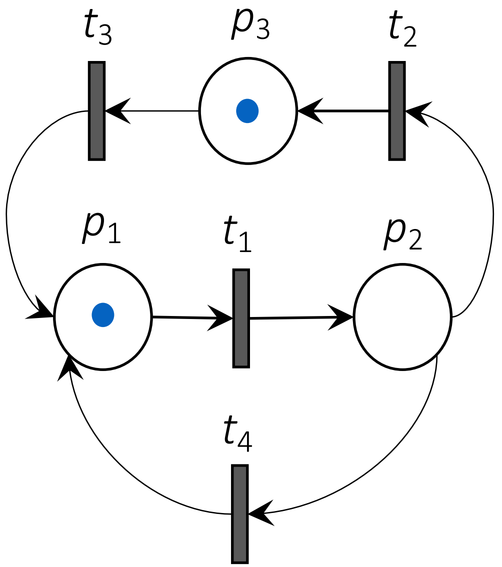
$S'_Y = t_2\, t_1$ $\qquad M_0 \xrightarrow{t_2\, t_1} M_0$



III.4. Invariants

Exemple.

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



- $X^T . W = 0$

1 unique P-invariant minimal:

$X = (1, 1, 1)$ et $\|X\| = \{ p_1, p_2 , p_3\}$

$M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) =$ constante

- $W . Y = 0$

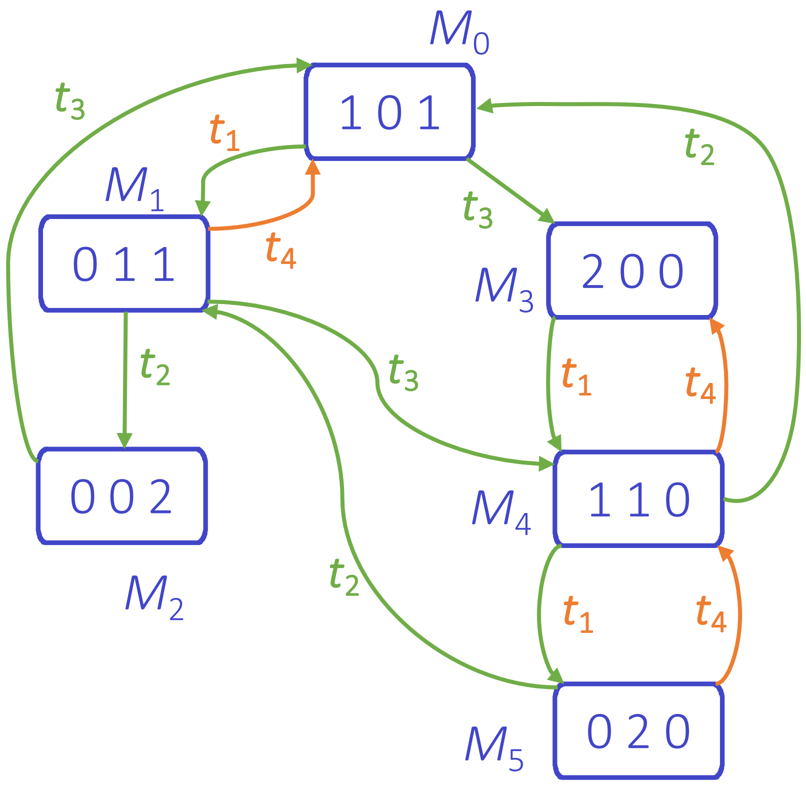
2 T-invariants minimaux :

$Y_1 = (1, 1, 1, 0)$ avec $\|Y_1\| = \{ t_1, t_2, t_3\}$

$Y_2 = (1, 0, 0, 1)$ avec $\|Y_2\| = \{ t_1, t_4\}$

Pour $M_0 = (1, 0, 1)$:

- $M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) = 2$
- Séquences répétitives : $< t_1\ t_2\ t_3 >$ et $< t_1\ t_4 >$



Plan

Propriétés des RdP

IV. Propriétés des RdP

Il existe deux types de propriétés :

- Les ***propriétés comportementales*** : elles dépendent du marquage initial M_0 et de la structure du RdP.

- Les ***propriétés structurelles*** : elles dépendent uniquement de la structure du RdP.

Propriétés comportementales

IV.1. Propriétés comportementales

Atteignabilité (accessibilité)

Définition. Le ***problème d'atteignabilité*** d'un marquage *M'* à partir d'un marquage *M* consiste à vérifier s'il existe une séquence de transitions *S* telle que $M \xrightarrow{S} M'$, ou plus simplement si $M' \in R(M)$.

Théorème 4.1.

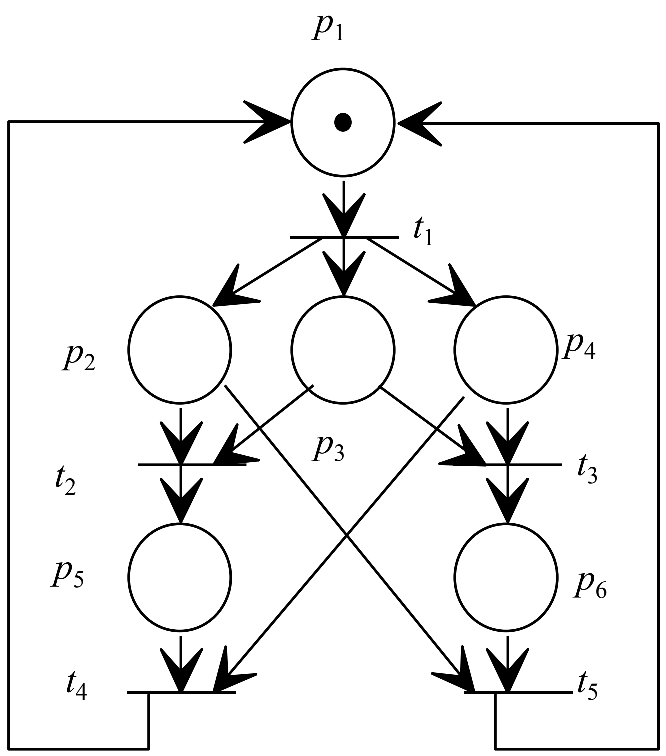
- Si un RdP $< PN, M_0 >$ est borné, un marquage *M* est atteignable ssi le graphe des marquages comporte un nœud représentant *M*.
- Si un RdP $< PN, M_0 >$ est non borné, il est impossible de vérifier à l'aide du graphe de couverture si *M* est atteignable. On peut seulement vérifier qu'il existe un marquage $M' \geq M$.

Théorème 4.2. Pour tout marquage atteignable *M* d'un RdP, l'équation $M = M_0 + W \,.\, Y$ possède au moins une solution, où *W* est la matrice d'incidence et *Y* est un vecteur de taille |T| à composantes entières non négatives.

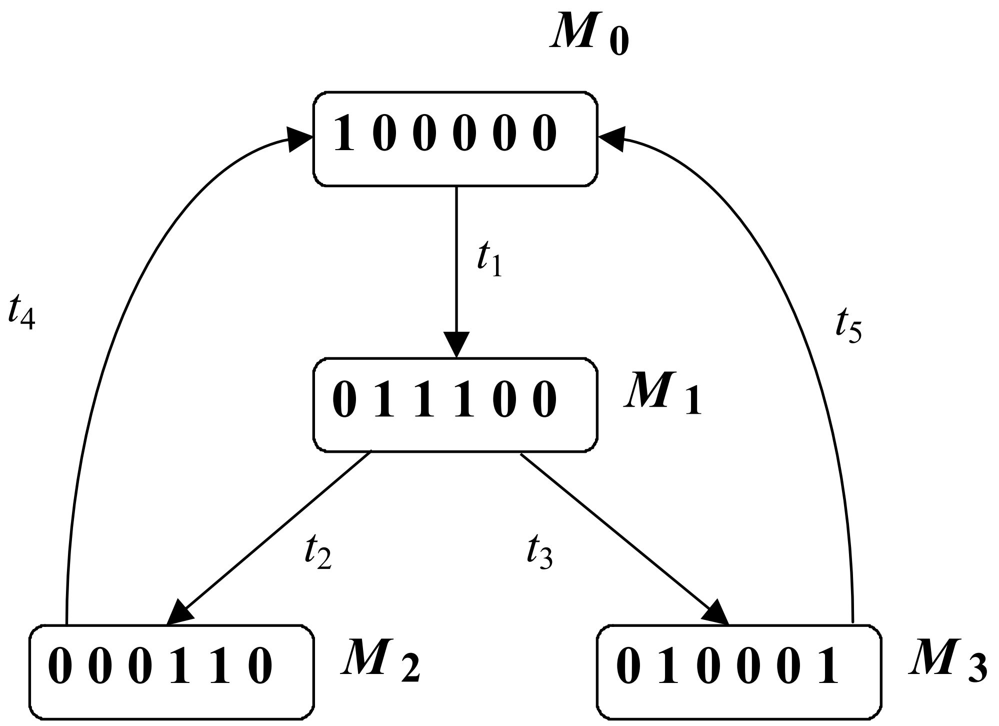
IV.1.a. Atteignabilité / accessibilité

Exemple 1.

Soit le RdP <N1,M_0> suivant :



Le graphe de marquages de <N1, M_0> est :



$R(M_0) = A(N1,M_0) = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$: ensemble des marquages atteignables/accessibles à partir de M_0.

IV.1. Propriétés comportementales

Bornitude

Définitions.

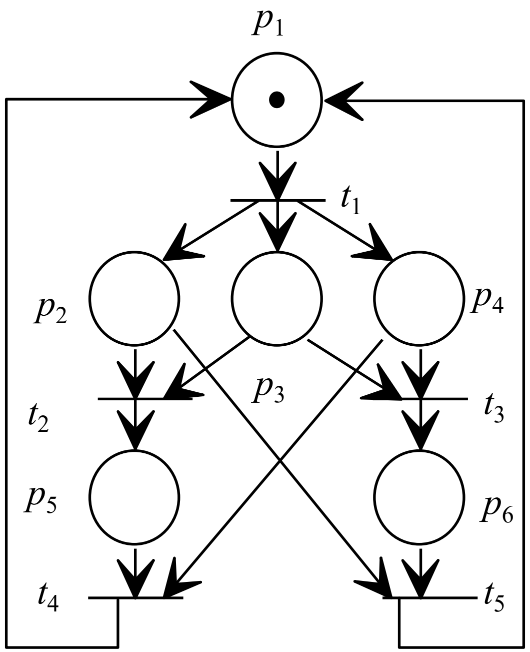
- Une place p_i d'un RdP marqué < *PN, M*$_0$ > est ***k-bornée*** s'il existe un entier positif k tel que pour tout marquage M accessible à partir du marquage initial M_0, on ait $M(p_i) \leq k$.
- Un RdP marqué < *PN, M*$_0$ > est ***k-borné*** si toutes ses places sont k-bornées.

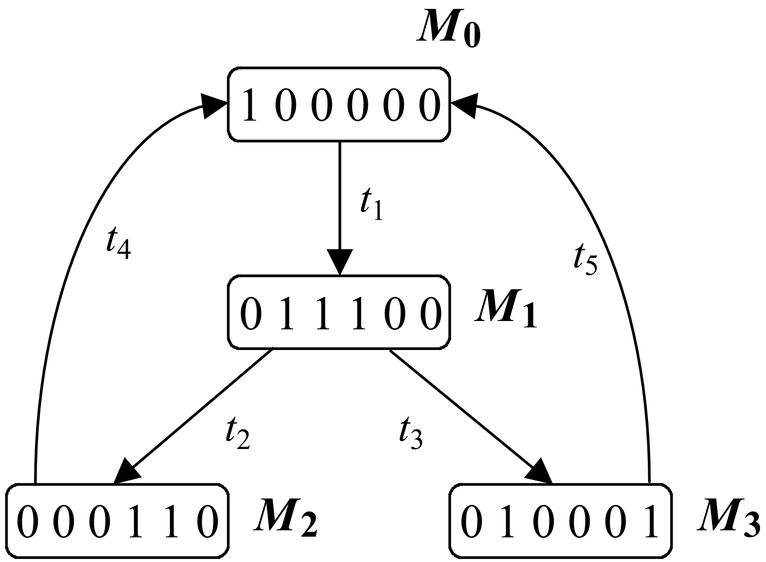
Remarque. On dit que le réseau est ***sain (ou sauf)*** s'il est 1-borné.

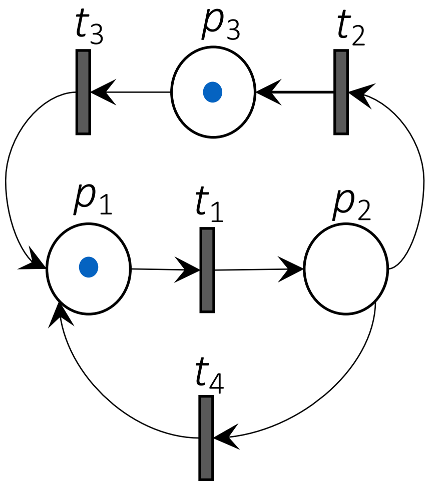
Théorème 4.3. Un RdP < *PN, M*$_0$ > est borné ssi les marquages liés aux nœuds du graphe de marquage/couverture ne comportent pas d'élément « $\boldsymbol{\omega}$ ».
Si la condition précédente est vraie, le RdP est k-borné ssi les marquages du graphe de marquages ne comportent pas d'éléments supérieurs à k.

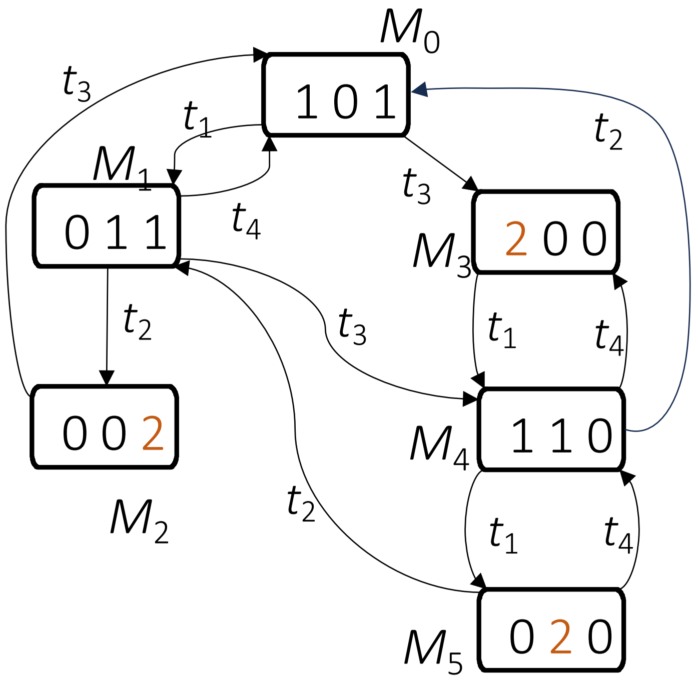
IV.1.b. Bornitude

Exemples.









Pour ce RdP avec M_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0),
le modèle est borné à 1, i.e., le RdP <$N1$, M_0> est sauf.

Pour celui-ci avec M_0 = (1, 0, 1),
le modèle est borné à 2.

IV.1. Propriétés comportementales

Vivacité et blocage

Définition. Une transition t_j d 'un RdP $< PN, M_0 >$ est ***vivante*** si quel que soit le marquage M accessible à partir du marquage M_0, il existe une séquence de franchissement S qui, partant de M, conduit à un marquage qui permet de franchir la transition t_j, i.e. :

$$\forall\, M \in R(M_0),\ \exists\, M' \in R(M) \text{ tel que } t_j \text{ est franchissable pour } M'.$$

Définition. Un RdP $< PN, M_0 >$ est ***vivant*** si toutes ses transitions sont vivantes.

Définition. Si il existe dans un RdP $< PN, M_0 >$, un marquage accessible M pour lequel aucune transition n'est franchissable, ce marquage est un ***blocage***, i.e. :

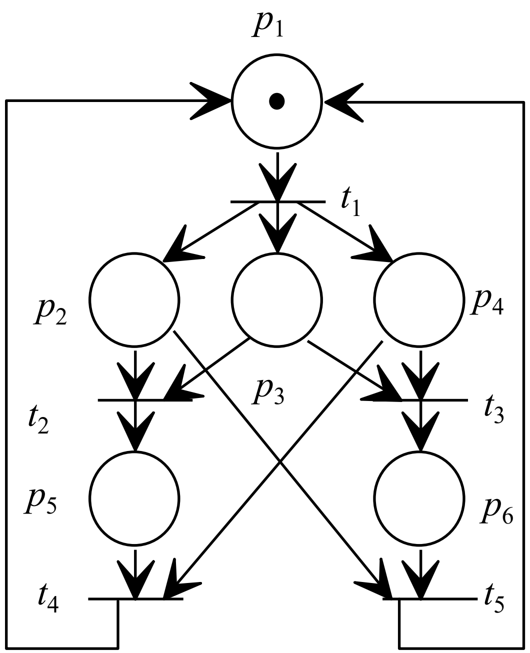
$$\exists\, M \in R(M_0) \text{ tel que } M < Pre(., t_j),\ \forall\, t_j \in T.$$

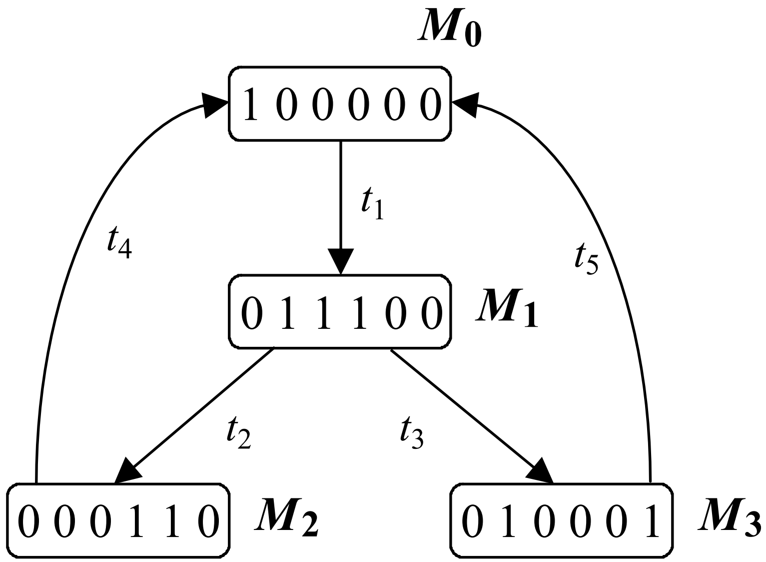
Remarques. 1) le fait qu'un RdP soit vivant exclut les blocages et garantit l'absence de partie morte (jamais atteinte).

2) le fait qu'un RdP comporte un blocage garantit que le RdP n'est pas vivant (l'inverse n'est pas vrai !).

IV.1.c. Vivacité

Exemple 1.





Pour ce RdP avec M_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), toutes les transitions sont vivantes.
Le RdP <$N1$, M_0> est donc vivant.

IV.1. Propriétés comportementales

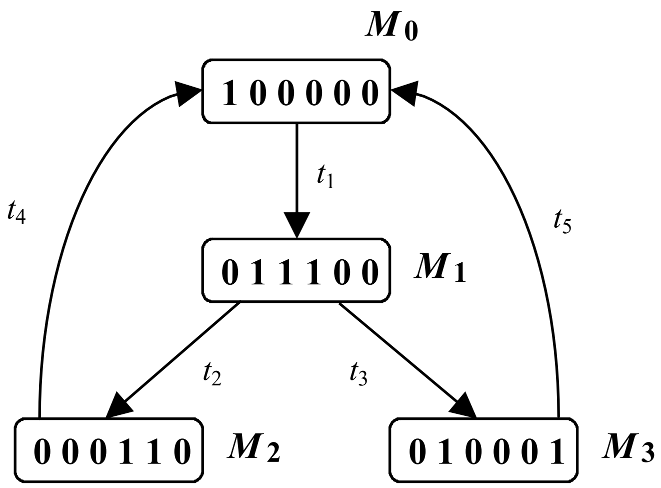
Réversibilité et état d 'accueil

Définition. Un marquage M_a est dit ***état d 'accueil*** s'il peut être atteint à partir de tous les marquages atteignables, i.e., $M_a \in R(M)$, quel que soit $M \in R(M_0)$.

Définition. Un RdP < PN, M_0 > est ***réversible*** si quel que soit le marquage M atteignable à partir du marquage initial M_0, M_0 est atteignable à partir de M.

En d'autres termes, un RdP < PN, M_0 > est ***réversible*** si le marquage initial M_0 est état d'accueil.

Exemple 1.



Le RdP <$N1$, M_0> est réversible.

Propriétés structurelles

IV.2. Propriétés structurelles

- Un RdP est dit ***structurellement borné*** s'il est borné pour tout marquage initial M_0.

- Un RdP est dit ***structurellement vivant*** s'il existe un marquage initial M_0 tel qu'il soit vivant.

- Un RdP est dit ***conservatif*** s'il existe un vecteur colonne $X \geq 0$, de taille $|P|$, tel que $X^T.M = X^T.\ M_0$, $\forall\ M_0$ et $\forall\ M \in R(M_0)$.

- Un RdP est dit ***répétitif*** s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence S de transitions franchissables dans laquelle chaque transition apparaît un nombre illimité de fois.

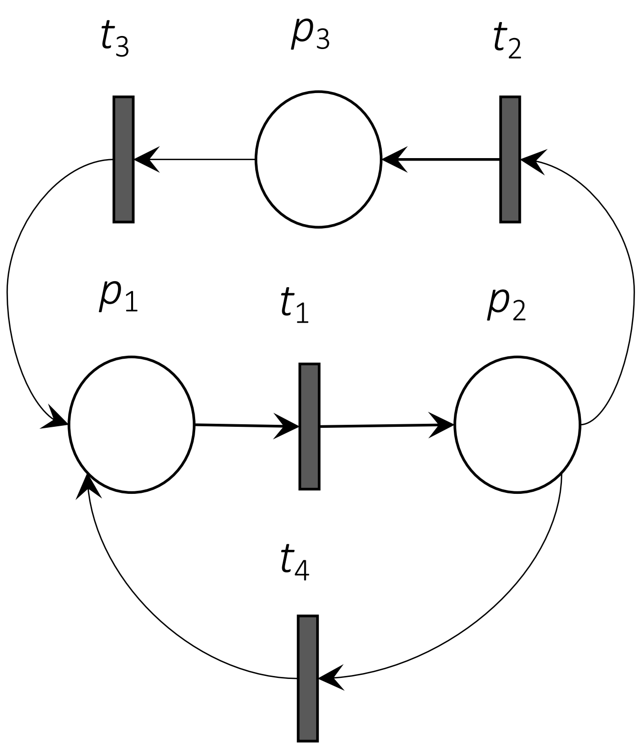
- Un RdP est dit ***consistant*** s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence S de transitions franchissables qui contient au moins une fois chaque transition et dont le franchissement conduit à nouveau à M_0.

Remarques.

- Un RdP vivant est structurellement vivant, mais la réciproque est fausse.
- Si un RdP est structurellement borné et structurellement vivant, alors il est consistant et conservatif.

IV.2. Propriétés structurelles

Exemple.



- $M(p_1) + M(p_2) + M(p_3)$ = constante, i.e., P-invariant $X > 0$ (condition suffisante)

=> toutes les places sont bornées quel que soit le marquage

=> RdP **structurellement borné**

=> RdP **conservatif**

- Pour $M_0 = (1, 0, 1)$: il est vivant

=> RdP **structurellement vivant**

- Chaque transition est couvert par un T-invariant

=> RdP **consistant**

=> RdP **répétitif**

Plan

Conclusion

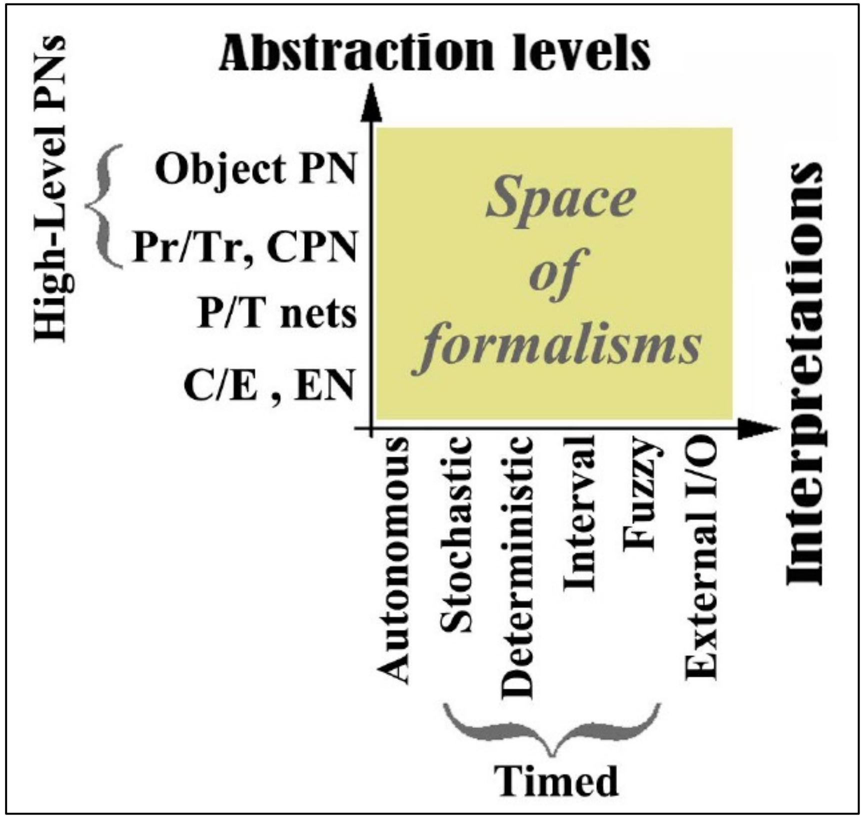
V. Conclusion

Type de réseaux de Petri :

- autonomes
- labélisés
- synchronisés
- temporisés, temporels
- stochastiques,
- colorés, objets, flous,
- continus, hybrides,
- etc.

utilisés pour :

- l'évaluation de performances,
- le contrôle, la commande,
- l'ordonnancement,
- la conception, la spécification,
- le test, l'identification d'états
- le diagnostic,
- etc.



© Silva

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- Murata, T. (1982). *Petri Nets: Properties, Analysis and Applications.* Proceedings of the IEEE, vol. 77, n° 4.
- G.W. BRAMS. (1983). *Réseaux de Petri : théorie et pratique.* Ed. Masson.
- David, R. and Alla, H. (1992). *Du Grafcet aux réseaux de Petri.* Ed. HERMES.
- Cassandras, C. G. and Lafortune, S. (2008). *Introduction to discrete event systems.* Springer.
- David, R. and Alla, H. (2010). *Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets.* Springer.

- *Petri Nets World*: http://www.petri-net.de/
- *Tools on Petri nets*: https://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/tools/quick.html

Equipe pédagogique

Equipe pédagogique

Auteur.rice.s : Pascal Berruet, Isabel Demongodin, Olivier H. Roux, Armand Toguyeni

Intervenante : Isabel Demongodin

Merci pour votre attention